Elementi di Meccanica Statistica
Sessione Estiva II appello A.A. 2009-2010
12 luglio 2010

Esercizio n. 1

N particelle classiche di massa m, contenute in una sfera di raggio R, sono soggette ad un potenziale

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \alpha > 0$$

dove $\mathbf{r}$, è il vettore posizione e $\hat{\mathbf{z}}$ il versore dell'asse z. Si chiede di determinare:

1. l'energia libera;
2. la pressione esercitata dal gas sulla superficie sferica;
3. il calore specifico;
4. l'equazione di stato nel limite $T \to \infty$.

Si suggerisce di utilizzare le coordinate sferiche.

Esercizio n. 2

N fermioni di spin $1/2$ si trovano a temperatura zero in un volume V con relazione di dispersione energia-impulso anisotropa

$$E(p_x, p_y, p_z) = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + \frac{p_z^2}{2m}$$

dove c ha le dimensioni di una velocità e m quelle di una massa. Si chiede di determinare:

1. la densità degli stati;
2. l'energia di Fermi;
3. l'energia in funzione del volume e del numero di particelle;
4. la pressione.

Soluzione

Esercizio n. 1

Le N particelle sono indipendenti, quindi la funzione di partizione è la potenza N-esima della funzione di partizione di singola particella. La funzione di partizione di singola particella è il prodotto dell'integrale sugli impulsi e di quello sulle configurazioni. Il primo dà il risultato solito $(2\pi m k_B T)^{3/2}$, mentre il secondo, usando le coordinate sferiche, è

$$4\pi R^3 f(\beta\alpha R)$$

con la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \frac{\cosh(x)}{x^2} - \frac{\sinh(x)}{x^3}.$$

L'energia libera è allora

$$F = -N k_B T \ln\left((2\pi m k_B T)^{3/2} 4\pi R^3 f(\beta\alpha R)\right).$$

La pressione si ottiene da

$$P = -\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}F$$

cioè

$$P = \frac{N k_B T}{(4/3)\pi R^3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta\alpha R f'(\beta\alpha R)}{f(\beta\alpha R)}\right).$$

Quando $T \to \infty$, cioè $\beta \to 0$, l'argomento della funzione $f(x)$ tende a zero. Sviluppando per piccoli valori di x si ha

$$f(x) \approx \frac{1}{3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 5} + \ldots$$

e

$$f'(x) \approx \frac{x}{3\cdot 5} + \ldots.$$

È evidente quindi che nel limite $T \to \infty$ l'equazione di stato tende a quella di un gas perfetto con il volume pari a quello della sfera.

Il calore specifico si ottiene dalla formula

$$c_V = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}.$$

Quindi

$$c_V = N k_B\left(\frac{3}{2} + (\beta\alpha R)^2\left(\frac{f''(\beta\alpha R) f(\beta\alpha R) - (f'(\beta\alpha R))^2}{f^2(\beta\alpha R)}\right)\right).$$

Esercizio n.2

La densità degli stati è definita da

$$\nu(E) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \delta \left(E - c\sqrt{p_x^2 + p_y^2} - \frac{p_z^2}{2m} \right)$$

da cui

$$\nu(E) = 2\frac{\sqrt{2m}}{3\pi^2\hbar^3 c^2} E^{3/2}.$$

L'energia di Fermi è quindi

$$E_F = \left(\frac{5}{2}\frac{N}{V}\frac{3\pi^2\hbar^3c^2}{2\sqrt{2m}} \right)^{2/5}.$$

Per l'energia si ottiene

$$U = \frac{5}{7} N \left(\frac{5}{2}\frac{N}{V}\frac{3\pi^2\hbar^3c^2}{2\sqrt{2m}} \right)^{2/5}.$$

Infine per la pressione

$$P = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2}\frac{3\pi^2\hbar^3c^2}{2\sqrt{2m}} \right)^{2/5} \left(\frac{N}{V} \right)^{7/5}.$$