Elementi di Meccanica Statistica
Sessione Autunnale II appello A.A. 2009-2010
4 ottobre 2010

Esercizio n. 1

Un gas di N particelle classiche di massa m è contenuto in un guscio sferico con centro nell'origine delle cordinate e raggi interno ed esterno R_1 e R_2, rispettivamente, con $R_2 > R_1$. Le particelle sono soggette ad un potenziale $V(x, y, z) = \alpha\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ con α una costante positiva. Si chiede di determinare l'espressione della pressione esercitata dal gas sulle due pareti del guscio sferico.

Esercizio n. 2

N fermioni neutri di spin $1/2$ sono vincolati a muoversi in un piano di area S e sono soggetti ad un campo magnetico con Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} \mp g\mu_B B/2$$

dove g è il fattore giromagnetico, μ_B il magnetone di Bohr, B l'intesità del campo magnetico. Il segno $\mp$ si riferisce ai fermioni con spin parallelo e antiparallelo rispetto alla direzione del campo magnetico. Si chiede di determinare il potenziale chimico in funzione della temperatura T, densità superficiale, N/S e dell'energia $\Delta = g\mu_B B/2$.

Soluzione

Esercizio n. 1
La funzione di partizione può essere scritta nella forma

$$Z = \frac{{Z_1}^N}{N!}$$

dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella. Si ha

$$Z_1 = (2\pi mkT)^{3/2} I$$

dove I è l'integrale sulle configurazioni

$$I = \int_{V_{guscio}} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z \ e^{-\beta V(x,y,z)}.$$

Usando le coordinate sferiche, si ottiene

$$I = \frac{4\pi}{(\beta\alpha)^3} \left[f(\beta\alpha R_1) - f(\beta\alpha R_2) \right]$$

dove si è introdotta la funzione

$$f(w) = e^{-w}(w^2 + 2w + 2).$$

Le pressioni sulla superficie esterna ed interna sono date dalle formule

$$P_e = -\frac{1}{4\pi R_2^2} \frac{\partial F}{\partial R_2}, \ P_e = -\frac{1}{4\pi R_1^2} \frac{\partial F}{\partial R_1}.$$

Eseguendo il calcolo si ottiene

$$P_e = N \frac{\beta^2 \alpha^3 e^{-\beta\alpha R_2}}{f(\beta\alpha R_1) - f(\beta\alpha R_2)}, \ P_i = -N \frac{\beta^2 \alpha^3 e^{-\beta\alpha R_1}}{f(\beta\alpha R_1) - f(\beta\alpha R_2)}.$$

Esercizio n.2
Il numero di fermioni in termini del potenziale chimico è

$$N = S \int \mathrm{d}^2 p \; \left[\frac{1}{e^{\beta(p^2/2m - \Delta - \mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m + \Delta - \mu)} + 1} \right].$$

Introducendo la densità degli stati $N_0 = m/(2\pi\hbar^2)$ e la densità $\rho = N/S$, otteniamo l'equazione

$$\beta \frac{\rho}{N_0} = \ln \left[e^{2\beta\mu} + 2\cosh(\beta\Delta) e^{\beta\mu} + 1 \right].$$

Risolvendo rispetto al potenziale chimico si ottiene

$$\mu = kT \ln \left[\sqrt{e^{\beta\rho/N_0} - 1 + \cosh^2(\beta\Delta)} - \cosh(\beta\Delta) \right].$$