I risultati di un esperimento sono variabili aleatorie.

Un esperimento non consente di esaminare ogni elemento di una popolazione o di effettuare tutte le misure possibili.

campione → Stime: $\langle x \rangle$, $\bar{x}$, s

Popolazione → parametri: μ σ

Dato un campione *n* estratto da una popolazione N è possibile fornire una stima ($\langle x \rangle$, s) dei parametri reali della distribuzione (μ, σ).

I risultati ottenuti su un campione rappresentano una stima dei valori "veri"

I valori stimati sono variabili aleatorie

Quanto sono accurate queste stime?

Popolazione

$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{k=1}^{n_c} x_k p(x_k)$ Valore atteso (media)

Varianza $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \sum_{k=1}^{n_c} p(x_k)(x_k-\mu)^2$

Campione

$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j = \sum_{k=1}^{n_c} x_k f(x_k)$ Media campionaria

Varianza campionaria $s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(x_j-\bar{x})^2$

Teorema del limite centrale

La distribuzione delle medie campionari ($\langle x \rangle_i$) segue una distribuzione normale indipendentemente dalla distribuzione della popolazione d'origine

Il valor medio della distribuzione delle media campionarie è uguale alla media della popolazione d'origine

La deviazione standard dell'insieme di tutte le medie campionarie (errore standard della media σ_x) è una funzione della deviazione standard della popolazione originaria e del numero di elementi del campione.

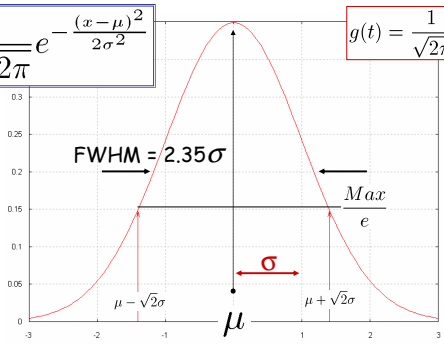
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{x}}^2}} e^{-\frac{(\bar{x}_i-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}}$$

nota: dev.st. della popolazione

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

Proprietà della distribuzione di Gauss

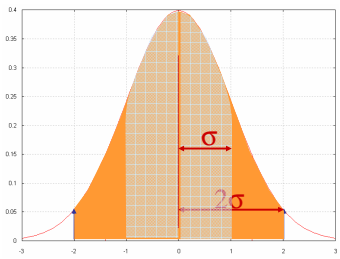
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} g(x)dx = 0.68$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} g(x)dx = 0.95$$

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} g(x)dx = 0.997$$



Date due variabili aleatorie indipendenti X_a, X_b caratterizzate da μ_a σ_a, μ_b σ_b, la variabile $Z = X_a + X_b$ è una variabile aleatoria con:

$\mu_z = \mu_a + \mu_b$

$\sigma_z = \sigma_a + \sigma_b$

Stima della media

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{x}}^2}} e^{-\frac{(\bar{x}_i-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

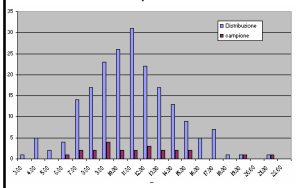
L'errore standard della media

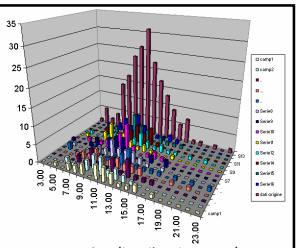
$\sigma_{\bar{x}}$ indica il grado di incertezza da associare alla stima della media ottenuta utilizzando un campione dell'intera popolazione

Interpretazione: se effettuo diversi campionamenti (al limite tutti i possibili campionamenti) da una data popolazione le medie ottenute per i vari campionamenti si distribuiscono attorno al valore μ. La larghezza della distribuzione dei valori medi sarà tanto più stretta intorno al valore vero quanti più elementi scelgo per ogni campionamento (m).

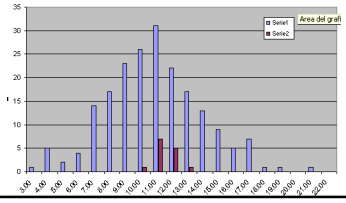
ATTENZIONE: l'errore standard sulla media è funzione della deviazione standard della distribuzione ma non è la deviazione standard della distribuzione.

La distribuzione reale confrontata con un ipotetico campione





La distribuzione reale confrontata con più campioni



La distribuzione reale confrontata la distribuzione delle medie

Accuratezza delle stime

Il valor medio ottenuto da **un** solo campione di **m** elementi è una stima del valore aspettato della popolazione.

L'errore standard della media rappresenta una stima dell'errore fatto nella stima del valore atteso. Se non conosco la deviazione standard della popolazione utilizzo la stima della deviazione standard (s) per valutare l'errore sulla media

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \sim \frac{s}{\sqrt{m}}$$

Risultato di un'osservazione:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \qquad \bar{x} - \sigma_{\bar{x}} \leq \text{valore vero} \leq \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$$

Nota: attenziona al significato di queste formule

Accuratezza delle stime

Per migliorare la stima del valore atteso si puó ripetere l'esperimento utilizzando K campioni indipendenti

In questo caso la migliore stima del valore atteso è la media delle medie campionarie:

$$\bar{x} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i$$

Utilizzando K campioni indipendenti l'errore standard della media si calcola (radice quadrata) dalla varianza della distribuzione delle medie campionarie:

varianza:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

Stima della varianza:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

Standardizzazione e normalizzazione

La distribuzione delle medie campionarie $\bar{x}$ su campioni di m elementi segue una distribuzione **normale** indipendentemente dalla distribuzione della popolazione d'origine

Distribuzione delle medie campionarie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{x}}^2}} e^{-\frac{(\bar{x}_i-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}}$$

CASO 1: non conosco la varianza vera della distribuzione ma la devo stimare dai dati $\sigma_{\bar{x}} \sim \frac{s}{\sqrt{m}}$

La variabile: $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

è una variabile aleatoria (t-Student) che, per *m* molto grande, ha una distribuzione Normale Standard (ha media nulla e varianza unitaria):

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Standardizzazione e normalizzazione

La distribuzione delle medie campionarie $\bar{x}$ su campioni di m elementi segue una distribuzione **normale** indipendentemente dalla distribuzione della popolazione d'origine

Distribuzione delle medie campionarie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{x}}^2}} e^{-\frac{(\bar{x}_i-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}}$$

CASO 2: **conosco** la varianza vera della distribuzione quindi: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$

La variabile: $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

è una variabile aleatoria che segue una distribuzione Normale Standard (ha media nulla e varianza unitaria):

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Intervalli di Confidenza

ovvero quale è la probabilità di sbagliare la stima?

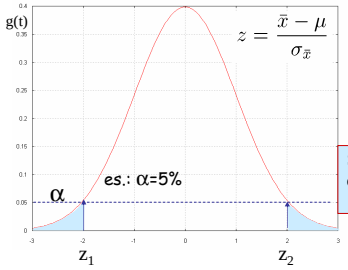
Pb.: un'osservazione su un campione di m elementi fornisce come risultato il valor medio $\bar{x}$ di una variabile aleatoria.

1) costruisco una variabile aleatoria con distribuzione nota, es.: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

2) sulla base della g(z) determino i valori di z che hanno una bassa probabilità di essere osservati, cioè:

- fisso un livello di confidenza α.
- determino un intervallo di valori $z_{\alpha 1}$–$z_{\alpha 2}$ (intervallo di confidenza) tale che la probabilità di osservare z all'esterno dell'intervallo dato sia minore di α

$$\alpha = P(z < \alpha) = P(z < z_1) + P(z > z_2) = \int_{-\infty}^{z_1} g(z)dz + \int_{z_2}^{\infty} g(z)dz$$



Se $z_1 < z < z_2$ la probabilità di osservare il valore di t, calocolato in base ai dati, è (1-α)

Se $z < z_1$ o $z > z_2$ la probabilità di osservare il valore di z, calocolato in base ai dati, è α

$$P(z_1 < z < z_2)) = \int_{z_1}^{z_2} g(z)dz = 1 - \alpha$$

probabilità che t appartenga all'intervallo z_1 - z_2

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$P(z_1 < z < z_2) = P(\bar{x} - z_1\sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + z_2\sigma_{\bar{x}})$$

dato il valore medio $\bar{x}$, osservato su un campione di **m** elementi, il valore atteso della popolazione (μ) è contenuto nell'intervallo:

$$[\bar{x} - z_1\sigma_{\bar{x}}; \bar{x} + z_2\sigma_{\bar{x}}]$$

con probabilità 1-α.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

$$P(z_1 < z < z_2) = P(\mu - z_1\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < \mu + z_2\sigma_{\bar{x}})$$

dato il valore medio $\bar{x}$, osservato su un campione di **m** elementi, 1-α è la probabilità che questo sia compreso nell'intervallo

$$[\mu - z_1\sigma_{\bar{x}}; \mu + z_2\sigma_{\bar{x}}]$$

che puó essere detto anche: α è la probabilità di fare un errore maggiore di $z\sigma_{\bar{x}}$ utilizzando la media come stima del valore atteso (quantificare il rischio)

funzione EXCEL:

CONFIDENZA(α, dev.st, m)

Intervalli di confidenza: varianza nota

Se le osservazioni sono distribuite con: valor medio $\bar{x}$, dev.st. $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$

funzione EXCEL: **CONFIDENZA(α, dev.st, m)**

La resistenza elettrica di un cavo viene misurata con uno strumento che ha un'incertezza σ=0.5 Ω. Vengono effettuate 5 misure, ne risulta un valor medio R̄=4.52 Ω

CONFIDENZA(0.05, 0.5, 5)=0.438

La resistenza vera del cavo è nell'intervallo :

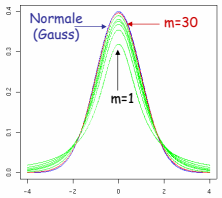
R = 4.52 ± 0.44 Ω oppure: R = [4.08, 4.96]

Nota: **α** rappresenta il rischio di sbagliare, cioè la probabilità che il valore vero della resistenza sia esterno all'intervallo dato

Intervalli di confidenza: varianza campionaria

Molto piú spesso non conosco la varianza della distribuzione. La migliore stima della varianza in un campione di m elementi è: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{m}}$

posso definire una variabile aleatoria: $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/m}}$ la variabile t cosi definita ha una distribuzione nota (t-Student) con ν = m-1 gradi di libertà. La t-Student approssima una distribuzione Gaussiana per ν che tende a infinito



$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/m}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{m}}$$

L'intervallo di confidenza rappresenta la regione in cui la probabilità che il valore osservato di $\bar{x}$ sia nell'intervallo t_1 - t_2 intorno al valore vero è 1-α:

$$P(t_1 < t < t_2) = P(\mu - \sigma_{\bar{x}} t_1 < \bar{x} < \mu + \sigma_{\bar{x}} t_2)$$

$$P(\mu - t_1 \frac{s}{\sqrt{m}} < \bar{x} < \mu + t_2 \frac{s}{\sqrt{m}})$$

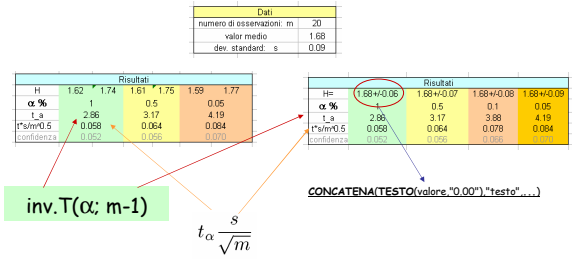
intorno al valore vero. $[\mu - \sigma_{\bar{x}} t_1; \mu + \sigma_{\bar{x}} t_2]$

$$\left[\bar{x} - t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}; \bar{x} + t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}\right]$$

funzione EXCEL: INV.T(α,m-1) = t_a

Una misura dell'altezza di un gruppo di 20 studenti fornisce il valore medio: H = 1.68 m con la deviazione standard stimata s = 9 cm.

Determinare gli intervalli di confidenza con un incertezza minore di 1%, 0.5% e 0.05%



inv.T(α; m-1)

$$t_\alpha \frac{s}{\sqrt{m}}$$

Nota: Se conosco la varianza utilizzo la funzione "confidenza", se devo stimare la varianza utilizzo la funzione "inv.T"

Una misura dell'altezza di un gruppo di 20 studenti fornisce il valore medio: H = 1.68 m con la deviazione standard stimata s = 9 cm.

Determinare l'intervallo di confidenza dell'1%

Dati			
numero di osservazioni: m		20	
valor medio		1.68	
dev. standard: s		0.09	
Confidenza	α	0.01	
	t_a	2.86	
μ	1.68	±	0.06

inv.T(α; m-1)

$$t_\alpha \frac{s}{\sqrt{m}}$$

valore medio

Intervalli di confidenza: varianza campionaria

Molto piú spesso non conosco la varianza della distribuzione. La migliore stima della varianza in un campione di m elementi è:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{m}} \qquad \text{da cui:} \quad t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/m}}$$

$$P(\bar{x} - t_1 \frac{s}{\sqrt{m}} < \mu < \bar{x} - t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}) = 1 - \alpha$$

probabilità che il valore vero (μ) sia nell'intervallo:

$$\left[\bar{x} - t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}; \bar{x} + t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}\right]$$

funzione EXCEL: INV.T(a,m-1) = $t_1 \frac{s}{\sqrt{m}}$.

Nota: la variabile t cosi definita ha una distribuzione nota (t-Student) con ν = m-1 gradi di libertà. La t-Student approssima una distribuzione Gaussiana per ν che tende a infinito

Test statistici di reiezione delle ipotesi

1) ipotesi da verificare ipotesi nulla: H_o

Es.: il valore misurato è compatibile con il valore vero?

2) costruisco una variabile aleatoria con distribuzione nota, es.:

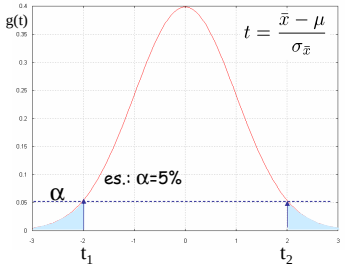
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

3) sulla base della g(t) determino i valori di t che hanno una bassa probabilità di essere osservati, fissando il livello di confidenza α. Se, in base alla distribuzione scelta, il valore osservato fornisce un valore di t con bassa probabilità di essere osservato, l'ipotesi deve essere rifiutata.

Quale è il rischio di scartare un dato compatibile?

$$P(t < \alpha) = P(t < t_1) + P(\ t > t_2\ ) = \int_{-\infty}^{t_1} g(t)dt + \int_{t_2}^{\infty} g(t)dt = \alpha$$

$$P(t > \alpha) = P(t_1 < t < t_1) = \int_{t_1}^{t_2} g(t)dt = 1 - \alpha$$



~~Se $t_1 < t < t_2$ il risultato (cui è associato il valore t) è compatibile l'ipotesi fatta con una probabilità del P = (1-α)~~

Se $t < t_1$ o $t > t_2$ il risultato (cui è associato il valore t) non è compatibile l'ipotesi fatta con una probabilità del P = (1-α)

α rappresenta la probabilità di sbagliare e scartare un'ipotesi corretta.

Confronto fra due popolazioni: t-test

Problema: si vogliono confrontare se due popolazioni normali, X_1 e X_2. Supponiamo per ora che queste abbiano la stessa varianza (omeoschedasticità).

Ipotesi: (H_o) le due popolazioni hanno la stessa media

$$t = \frac{\text{differenza delle medie campionarie}}{\text{errore standard sulla differenza delle medie campionarie}} \qquad t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2} \qquad t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}} \qquad \nu = m_1 + m_2 - 2$$

La variabile aleatoria t_ν segue una distribuzione nota (t-student) con ν gradi di libertà

Campioni omoschedastici (stessa varianza $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$, incognita)

$$t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}} \qquad \sigma^2_{\bar{x}_i} = \frac{s_i^2}{m_i - 1} \qquad \nu = m_1 + m_2 - 2$$

m1 diverso da m2

$$t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s^2/m_1 + s^2/m_2}} \qquad s^2 = \frac{(m_1 - 1)s_1^2 + (m_2 - 1)s_2^2}{m_1 + m_2 - 2}$$

$m_1 = m_2 = m$

$$t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{2s^2/m}} \qquad s^2 = \frac{(s_1^2 + s_2^2)}{2} \qquad \nu = 2(m-1)$$

Campioni etero-schedastici (varianza diversa) (test di Welch)

$$t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}} \qquad \sigma^2_{\bar{x}_i} = \frac{s_i^2}{m_i} \qquad \nu = \frac{(s_1^2/m_1 + s_2^2/m_2)^2}{\frac{(s_1^2/m_1)^2}{m_1 - 1} + \frac{(s_2^2/m_2)^2}{m_2 - 1}}$$

Nota: se la numerosità dei campioni è elevata la variabile t approssima una distribuzione normale, quindi si può utilizzarare una variabile normale standard per il test:

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2/m_1 + s_2^2/m_2}}$$

Confronto fra due popolazioni: t-test

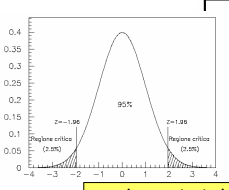
- La distribuzione della variabile *t*, ha una forma nota come "*student's t distribution*" (tende alla distribuzione normale di Gauss per N→∞)
- La forma della distribuzione dipende da un solo parametro, legato alla numerosità del campione: il numero di gradi di libertà

  $\nu = m_1 + m_2 - 2$
- Valori "piccoli" di *t* indicano che la differenza fra le medie dei due campioni non è significativa (i campioni sono consistenti), valori "grandi" indicano una differenza significativa
- Per formalizzare il concetto, si considera la probabilità che il valore di *t* sia maggiore (in valore assoluto) di un dato limite. I valori di cui $|t|$ è maggiore con una data probabilità sono detti "valori critici" e si trovano tabulati (→)

t-test

Fissato il numero di gradi di libertà, la tabella indica i valori di t tali per cui la probabilità di ottenere un valore maggiore (in modulo) di quello indicato sia pari ad α

α: Two Tails:	0.500	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
df:						
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.013	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
					2.567	2.898
					2.552	2.878
					2.539	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845



la probabilità che t_{10} >2.228 è <5%

funzione EXCEL: **TEST.T(X_A, X_B , coda, tipo)**

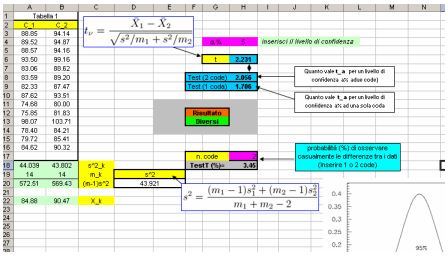
X_A X_A insiemi (matrici) dei dati corrispondenti ai due campionamenti

coda: **1** - test a una coda
2 - test a due code

tipo: **1** test accoppiato (stesso numero di valori)
2 test omeoschedastico (stessa varianza)
3 test eteroschedastico (varianza diversa)

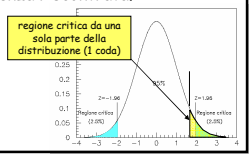
Il risultato rappresenta l'indice di confidenza del test. Ad esempio, un valore
TEST.T(....)=0.02
indica che, in base ai dati, la probabilità di sbagliare dicendo che le due medie sono diverse è il 2%.

Non posso dire che al 98% sono eguali! E' sbagliato dire che le medie sono diverse con il 2% di probabilità



In Excel la funzione Test.T restituisce la probabilità di osservare casualmente la differenza riscontrata.

Si distingue il caso in cui non si conosce il segno della differenza (test a due code) da quello in cui si conosce il segno della differenza (una coda)



Tassi e proporzioni

Classi nominali: non possono essere messe in relazione matematica quantitativa con una scala di riferimento.

Es.:

maschi/femmine,
bianco/nero,
mancini/destrorsi,...

45% maschi, 55% femmine

Processi Bernulliani: ammettono solo due possibilità

Ogni esperimento puó avere solo due risultati V/F, 1/0, si/no....
ovvero:
Ogni unità della popolazione appartiene solo a una delle due classi

gli esperimenti sono indipendenti,
ovvero
ogni unità del campione è determinata indipendentemente dalle altre

la probabilità *p* di un un certo risultato è costante durante l'esperimento
ovvero
la proporzione delle classi è costante durante l'esperimento

Analisi di proporzioni

p = probabilità di successi = N_successi/N_totale

q = probabilità di insuccessi = 1-p

Valore medio (proporzione):

X(successo) = 1
X(insuccesso) = 0

$$\mu = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} X_i = \frac{N_{succ}}{N_t} = p$$

dev.st:

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

Stime campionarie di proporzioni

stima di p:

$$\bar{x} = \frac{N_{suc}}{N_T} = f_s$$

stima di σ^2

$$s^2 = f_s(1-f_s)$$

uso la stima di p per la stima della σ

errore sulla stima di p:

$$s_f = \frac{\sigma}{\sqrt{N_T}} = \frac{\sqrt{f_s(1-f_s)}}{\sqrt{N_T}}$$

In un esperimento di 10 lanci di una moneta si ottengono 6 teste

$p_s = 0.6$

$s_p = 0.075$

il valore medio atteso (la probabilità di successo) è, con il 95% di probabilità, tra

$p-2s_p$ e $p+2s_p$

Test sulle frequenze di un "attributo"

$H_o: f_m = p_o$

Frequenza osservata:

$$f_m = \frac{N_{succ}}{m}$$

Errore stimato sulla frequenza:

$$\sigma_{f_m} = \frac{\sqrt{N_{succ}(m-N_{succ})}}{m} = \sqrt{\frac{f_m(1-f_m)}{m}}$$

La variabile aleatoria: $z_m = \frac{f_m - p_o}{\sigma_{f_m}}$ segue una distribuzione normale standard (N(0,1))

Es.: su un campione si 100 intervistati ha risposto Si il 58%. E' significativamente maggiore di 50% ?

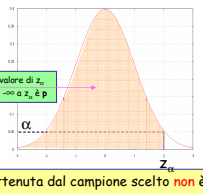
1) Scelgo un livello di confidenza α=4%

2) Inv.Norm.St(0.98) = 1.75 = z_α

INV.NORM.ST(p) = valore di z_α per cui l'integrale da $-\infty$ a z_α è p

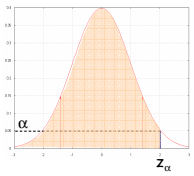
3) Io confronto con il valore della z_m

$$z_{100} = \frac{0.58 - 0.5}{\sqrt{0.58 \cdot 0.42/100}} = 1.62$$



Con un livello di confidenza di 4% la maggiornaza del Si ottenuta dal campione scelto non è significativa

$$z_m = \frac{f_m - p_o}{\sigma_{f_m}} = \frac{f_m - p_o}{s_f} = \frac{\Delta P}{s_f} > z_\alpha$$



La differenza osservata è significativa se:

$$\frac{s_f}{|\Delta P|} < \frac{1}{z_\alpha}$$

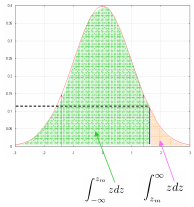
Nsucc	N	f_m	s	s_f
58	100	0.58	0.494	0.049
p_o	0.5			
z_m	1.621		s_f/Dp	0.617
a	0.050			
z_a	1.645			

z_α $\quad \frac{1}{z_\alpha}$

α	1 coda	2 code	1 coda	2 code
0.050	1.645	1.960	0.61	0.51
0.025	1.960	2.241	0.51	0.45
0.010	2.326	2.576	0.43	0.39
0.005	2.576	2.807	0.39	0.36

Es.: su un campione si 100 intervistati ha risposto Si il 58%. Quale è il rischio di sbagliare affermando la vittoria del Si al referendum?

Ho: $P_A=P_B$ $\quad H_1 : P_A>P_B$



1) Calcolo il valore della z_m

$$z_{100} = \frac{0.58 - 0.5}{\sqrt{0.58 \cdot 0.42/100}} = 1.62$$

2) Calcolo la probabilità associata alla coda della distribuzione usando la funzione EXCEL:

DISTRIB.NORM.ST(1.62) = $\int_{-\infty}^{z_m} zdz$ =0.947

DISTRIB.NORM.ST(z) = probabilità di ottenere un valore minore di z.

$\int_{z_m}^{\infty} zdz$ = 1 - DISTRIB.NORM.ST(1.62) =0.052

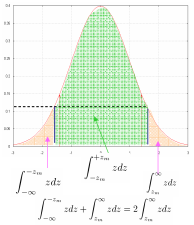
1-DISTRIB.NORM.ST(z) = probabilità di ottenere un valore maggiore di z.

Il rischio di sbagliare affermando la vittoria del Si al referendum è di 5.2%

Attenzione: test a una o due code

Es.: in un esperimento effettuato su un campione si 100 individui si osserva il 58% delle volte il carattere A e il 42% il carattere B. Quale è il rischio di sbagliare affermando che la popolazione non è equamente divisa?

H_o: $P_A=P_B$ $\quad H_1 : P_A \neq P_B$ (maggiore o minore)



1) Calcolo il valore della z_m $\quad z_{100} = \pm\frac{58 - 50}{\sqrt{58 \cdot 42/100}} = 1.62$

DISTRIB.NORM.ST(1.62) = $\int_{-\infty}^{z_m} zdz$ =0.947

$\int_{-\infty}^{-z_m} zdz + \int_{z_m}^{\infty} zdz = 2\int_{z_m}^{\infty} zdz$ = 2(1 - DISTRIB.NORM.ST(1.62)) =0.104

Il rischio di sbagliare affermando che la popolazione non è equamente divisa è di ~10%

Problema: si vogliono confrontare i risultati di due esperimenti in termini di frequenze relative

Ipotesi: (H_o) i due esperimenti appartengono alla stessa popolazione (hanno lo stesso velore aspettato)

$$t_\nu = \frac{\text{differenza delle medie campionarie}}{\text{errore standard sulla differenza delle medie campionarie}} \qquad t_\nu = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$z = \frac{\text{differenza delle frequenze campionarie}}{\text{errore standard sulla differenza delle frequenze campionarie}} \qquad z = \frac{f_{m_1} - f_{m_2}}{s_{f_1 - f_2}}$$

$$s_{f_1-f_2} = \sqrt{s_{f_1}^2 + s_{f_1}^2} = \sqrt{\frac{f_{m_1}(1-f_{m_1})}{m_1} + \frac{f_{m_2}(1-f_{m_2})}{m_2}}$$

$$H_o : f_{m_1} = f_{m_2}$$

$H_1 : f_{m_1} \neq f_{m_2}$ 1 coda $\qquad H_1 : f_{m_1} > f_{m_2}$ $\quad H_1 : f_{m_1} < f_{m_2}$ 2 code

Nell'ipotesi (da verificare) che i due campioni provengono dalla stessa popolazione $p_{m1}=p_{m2}$ la miglior stima della frequenza di successi ottenuta usando entrambi i campioni è:

$$\bar{f} = \frac{m_1 f_{m_1} + m_2 f_{m_2}}{m_1 + m_2}$$

e la varianza calcolata sull'intero campione è: $\quad s_{\bar{f}}^2 = \bar{f}(1-\bar{f})\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

$$z = \frac{f_{m_1} - f_{m_2}}{\sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}$$

Correzione per la continuità (Yates):

Deriva dal fatto che la z può assumere solo valori discreti mentre la distribuzione normale è continua. La correzione diventa via via meno significativa man mano che aumenta il numero di prove m

$$z_{cor} = \frac{|f_{m_1} - f_{m_2}| - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}{\sqrt{\bar{f}(1-\bar{f})\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}$$

Es.: in un sondaggio elettorale effettuato su un campione di 1000 persone, il 42% degli intervistati ha affermato di preferire la coalizione A.

In un secondo sondaggio effettuato su un egual numero di intervistati il 46 % ha affermato di preferire la coalizione A.

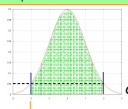
Quale è il rischio che questa differenza sia dovuta al caso?

Quale è il valore di Z per credere alla differenza con rischio di errore inferiore al 5%

$m_1 = m_2 = 1000$
$f_1 = 0.42$
$f_2 = 0.46$

$\langle f \rangle = 0.44$
$s^2_f = 4.93 \cdot 10^{-4}$

z = 1.8
z_{cor} = 1.76



Rischio: 7.9%

rischio = 2(1- distrib.norm.st(z_{cor}))

rischio: probabilità che, pur essendo valida l'ipotesi $f_1=f_2$, si osservi per caso un valore di z maggiore o uguale a quello trovato

Per credere alla differenza con un rischio minore del 5% α = 5%

$z_{5\%}$ = inv.norm.st(1-α/2) = 1.96

dal momento che $z_{cor} < z_{5\%}$ la probabilità di sbagliare affermando che i due risultati sono diversi è maggiore del 5%

Tabelle di contingenza

Tabella sperimentale — *frequenze assolute*

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	n_{11}	n_{12}	$N_1 = n_{11}+n_{12}$
Trattamento 2	n_{21}	n_{22}	$N_2 = n_{21}+n_{22}$
totali B	E_1	E_2	$N_T = N_1+N_2 = E_1+E_2$

Ipotesi (H_o): valori trovati sono determinati da una distribuzione casuale.

Se l'ipotesi è vera i risultati in tabella (n_{ij}) sono scorrelati e quindi le distribuzioni dei valori trovati nelle righe e nelle colonne sono scorrelate

Tabella sperimentale — *frequenze relative*

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	f_{11}	f_{12}	f_{T1}
Trattamento 2	f_{21}	f_{22}	f_{T2}
totali B	f_{E1}	f_{E2}	1

Distribuzione congiunta $f_{ij} = n_{ij}/N_T$

Frazioni con diverso trattamento: $f_{T1} = N_1 / N_T$, $f_{T2} = N_2 / N_T$; $p_{Ti} = \frac{\sum_j n_{ij}}{N}$ — Distribuzione dei trattamenti

Frazioni con diverso esito: $f_{E1} = E_1 / N_T$, $f_{E2} = E_2 / N_T$; $p_{Ej} = \frac{\sum_i n_{ij}}{N}$ — Distribuzione degli effetti

Se effetto e trattamento sono scorrelati la probabilità di avere l'effetto j con il trattamento i è il prodotto:

$p_{ij} = p_{Ti}\, p_{Ej} \sim f_{Ti}\, f_{Ej}$

frequenze relative

Tabella teorica — *Ipotesi: i trattamenti hanno lo stesso effetto*

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	$f_{E1} f_{T1}$	$f_{E2} f_{T1}$	f_{T1}
Trattamento 2	$f_{E1} f_{T2}$	$f_{E2} f_{T2}$	f_{T2}
totali B	f_{E1}	f_{E1}	1

I valori attesi nell'ipotesi di effetti indipendenti dal trattamento ($p_{Ei}\, p_{Tj}$) sono diversi dal valore sperimentali p_{ij}

frequenze assolute

Tabella teorica — *Ipotesi: i trattamenti hanno lo stesso effetto*

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	$f_{E1} f_{T1} N_T$	$f_{E2} f_{T1} N_T$	N_1
Trattamento 2	$f_{E1} f_{T2} N_T$	$f_{E2} f_{T2} N_T$	N_2
totali B	E_1	E_2	N_T

frequenze relative

Tabella sperimentale

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	n_{11}	n_{12}	N_1
Trattamento 2	n_{21}	n_{22}	N_1
totali B	E_1	E_2	N_T

Tabella teorica

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	n'_{11}	n'_{12}	N_1
Trattamento 2	n'_{21}	n'_{22}	N_2
totali B	E_1	E_2	N_T

oppure:

frequenze assolute

Tabella sperimentale

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	f_{11}	f_{12}	f_{T1}
Trattamento 2	f_{21}	f_{22}	f_{T2}
totali B	f_{E1}	f_{E2}	1

Tabella teorica

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	$f_{E1} f_{T1}$	$f_{E2} f_{T1}$	f_{T1}
Trattamento 2	$f_{E1} f_{T2}$	$f_{E2} f_{T2}$	f_{T2}
totali B	f_{E1}	f_{E1}	1

Esempio

Tabella sperimentale

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	18	7	25
Trattamento 2	6	13	19
totali B	24	20	44

Tabella teorica

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Trattamento 1	13.64	11.36	25
Trattamento 2	10.36	8.64	19
totali B	24	20	44

Le differenze osservate sono sognificative?

La variabile χ^2

frequenze attese

$$\chi^2_\nu = \sum_i \frac{(n_{exp} - n_{th})^2}{n_{th}}$$

frequenze osservate

gradi di libertà: $\nu = (n_{col.}-1)(n_{righe}-1)$

$$\chi^2_1 = \frac{(18-13.64)^2}{13.64} + \frac{(7-11.36)^2}{11.36} + \frac{(6-10.36)^2}{10.36} + \frac{(13-8.64)^2}{8.64} = 7.1$$

exp

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Tratt. 1	18	7	25
Tratt. 2	6	13	19
totali B	24	20	44

Th

Gruppi	effetto 1	effetto 2	totali A
Tratt. 1	13.64	11.36	25
Tratt. 2	10.36	8.64	19
totali B	24	20	44

ν

α

$\chi^2_1 = 7.1$

Funzione EXCEL: INV.CHI(α,ν)

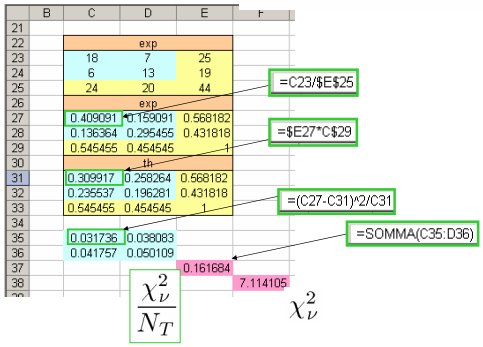
Level of Significance

df	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62

Se i trattamenti non avessero un effetto diverso, un valore di χ^2 con 1 grado di libertà maggiore di 6.63 ha una probabilità di essere osservato minore del 1%. Possiamo quindi affermare che i due trattamenti hanno un diverso effetto sui due gruppi con una probabilità di errore minore dell'1%

http://faculty.vassar.edu/lowry/PDF/t_tables.pdf

Nota: $\frac{\chi^2_\nu}{N_T} = \sum_i \frac{(f_{exp} - f_{th})^2}{f_{th}}$

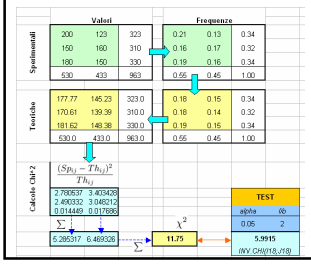


Titanic

14-04-1912

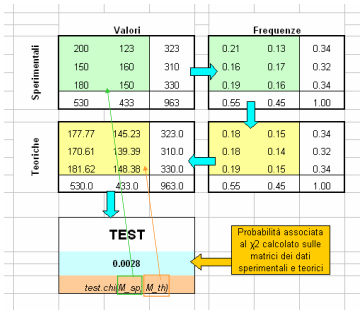
Classe	sopravvissuti	deceduti	totali A
I	200	123	
II	119	158	
III	181	528	

I decessi sono correlati con la classe?



Funzione EXCEL: `INV.CHI(α,ν)` restituisce il valore associato ad un livello di confidenza α per una variabile χ^2 con ν g.d.l.

la funzione: `DISTRIB.CHI(`χ^2`, ν)` restituisce la probabilità associata al valore di χ^2 con ν g.d.l.



la funzione EXCEL: `TEST.CHI(`M_{exp}, M_{th}`)` restituisce la probabilità associata al valore di ottenuto da una matrice di dati sperimentali M_{exp} e da una matrice di dati teorici M_{th} ottenuta nell'ipotesi di distribuzione casuale dei risultati.

Sondaggio Politico-Elettorale

Osservatorio politico

Pubblicato il 5/4/2007.

Autore:
Ekma S.r.l.

Committente/ Acquirente:
Clandestinoweb

Criteri seguiti per la formazione del campione:
Le interviste sono state realizzate su un campione di 1.000 casi stratificato per sesso ed età

Metodo di raccolta delle informazioni:
Interviste telefoniche - Metodologia C.A.T.I.

Numero delle persone interpellate e universo di riferimento:
1.000 casi - Universo di riferimento: 48.483.370 adulti maggiorenni residenti in Italia (Fonte: Istat - Popolazione al 01/01/2005

Data in cui è stato realizzato il sondaggio:
Tra il 2/4/2007 ed il 3/4/2007

http://www.sondaggipoliticoelettorali.it/

http://www.sondaggipolitici.it/

Risultati dei Test di ammissione

	M	F
Ammessi	1198	557
Respinti	1493	1278

	M	F
Ammessi	.44	.30
Respinti	.56	.70

Conclusione:

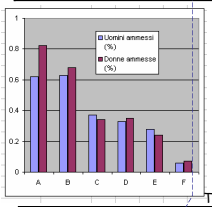
Le donne sono discriminate nei test di ammissione!

V/F ?

Risultati dei Test di ammissione dettagli per dipartimento

	Dip. A		Dip. B		Dip. C		Dip. D		Dip. E		Dip. F	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Amm.	512	89	353	17	120	202	138	131	53	94	22	24
Resp.	313	19	207	8	205	391	279	244	138	299	351	317

	Dip. A		Dip. B		Dip. C		Dip. D		Dip. E		Dip. F	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
% Amm.	.62	.82	.63	.68	.37	.34	.33	.35	.27	.24	.06	.07



Le differenza tra ammessi M o F sono significative?

No!

Test sulle frequenze

rischio (%)	7.1e-3	77	40	60	49	69

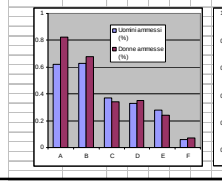
Test χ^2 tabelle di contingenza

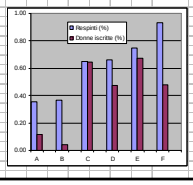
rischio (%)	3.2e-3	61	39	58	31	53

Test: le iscrizioni ai vari dipartimenti sono casuali? La frazione di respinti per dipartimento è casuale?

Ipotesi:
Le donne tendono a far domanda nei dipartimenti dove è maggiore la probabilità di essere respinti.

	A		B		C		D		E		F	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Ammessi	512	89	353	17	120	202	138	131	53	94	22	24
Respinti	313	19	207	8	205	391	279	244	138	299	351	317
Totale (M/F)	825	108	560	25	325	593	417	375	191	393	373	341
Totale	933		585		918		792		584		714	
% ammessi	0.62	0.82	0.63	0.68	0.37	0.34	0.33	0.35	0.28	0.24	0.06	0.07
% respinti	0.36		0.37		0.65		0.66		0.75		0.94	
% donne	0.12		0.04		0.65		0.47		0.67		0.48	





Il grafico mostra qualitativamente una correlazione positiva tra frazione di respinti e numero di donne iscritte.

L'analisi qualitativa (visiva) può essere (e spesso è) fonte di errori soggettivi.

Quantificare la correlazione

y = f(x) i valori della variabile y sonno funzione dei valori assunti dalla variabile indipendente x (deterministico):

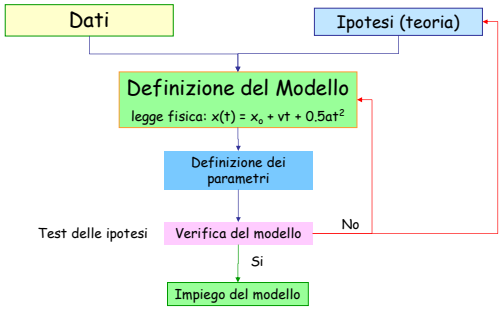
F = m·a ; x=v·t ; S = b·a ; V=I·R ; .....

Modelli statistici e inferenza statistica

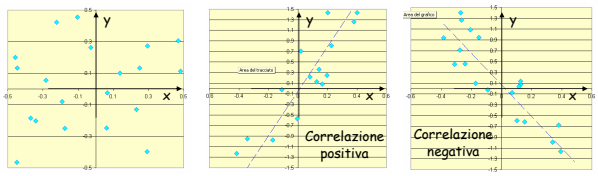
Modelli: relazione funzionale tra ciò che si vuole spiegare (effetto) e le cause.

Un modello statistico è:

- una semplificazione della realtà (rasoio di Occam: scartare le ipotesi complesse se ne esistono di più semplici che portano allo stesso risultato)
- un'analogia del fenomeno reale: il modello riproduce solo alcuni aspetti della realtà ma non è la realtà



Regressione (raffinamento, fitting, etc...): relazione funzionale tra variabili ottenuta con metodi statistici. Il metodo della regressione consente di derivare una relazione statistica tra una variabile dipendente (Y) e una o più variabili esplicative (X_1, X_2...X_n). Origine: Galton 1886 - regression toward mediocrity



Ipotesi: esiste una relazione lineare tra i valori della x e i valori della y

$$y_i = \beta_o + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Errori sulle osservazioni

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$ Varianza x

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})$$ Varianza y

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$ covarianza xy

Retta di regressione:

$$Y = \beta_o + \beta_1 X$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$\beta_o = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

Usando le variabili standardizzate: $X_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ $Y_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$

La retta di regressione diventa: $Y_i = \beta^* X_i$

$$y_i - \bar{y} = \beta^* \frac{s_y}{s_x}(x_i - \bar{x})$$

$$\beta_1 = \beta^* \frac{s_y}{s_x} \qquad \beta^* = \beta_1 \frac{s_x}{s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = r_{xy}$$

r = coefficiente di correlazione di Pearson

$$r = \sum \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(x - \bar{x})^2((y - \bar{y})^2)}}$$

Varianza degli errori

$$\sigma^2_{y_i} = \frac{1}{n}\sum (y_i - (\beta_o + \beta_1 x_i))^2 = \frac{1}{n}\sum (\epsilon_i)^2$$

$$\sigma^2_{\beta_o} = \frac{\sigma^2_{y_i}}{n}\left(1 + \frac{n\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right) \qquad \sigma^2_{\beta_1} = \frac{\sigma^2_{y_i}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Nota:

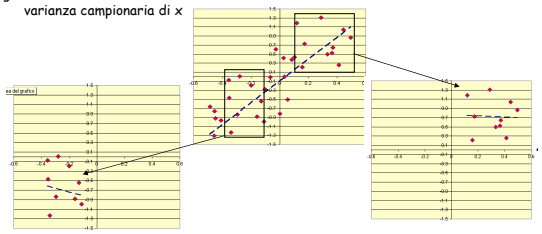
$$Corr(\beta_o, \beta_1) = -\frac{\bar{x}\sqrt{n}}{\sqrt{\sum (x_i)^2}}$$

Utilizzando

$$x' = x_i - \bar{x}$$

si annulla la correlazion e tra β_o e β_1

L'incertezza sulle stime dei parametri della regressione decresce aumentando la varianza campionaria di x



Stime campionarie

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x}_i)^2 \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (y_i - \bar{y}_i)^2$$

Nell'ipotesi che la varianza sia la stessa per tutti i valori osservati y_i, la stima campionaria della varianza sugli errori è

$$s^2_{y_i} = \frac{1}{n-2}\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = s^2 \quad \text{con} \quad \hat{y}_i = \beta_o + \beta_1 x_i$$

s: errore standard della regressione: $s = \frac{n}{n-2} s_y^2 (1 - (r_{xy})^2)$

Errori standard sui parametri

$$es(\beta_o) = \frac{s}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{n\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$es(\beta_1) = \frac{s}{s_x\sqrt{n}}$$

t-test

$t_\nu = \beta_i / es(\beta_i)$

$\nu = n-2$

L'intervalli di confidenza

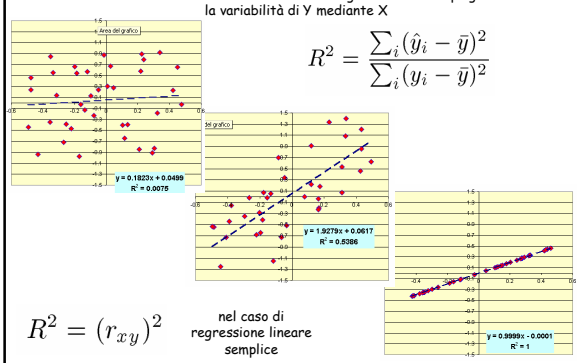
$$\beta_o - es(\beta_o) t_{(\alpha/2;n-2)} \le \hat{\beta}_o \le \beta_o + es(\beta_o) t_{(\alpha/2;n-2)}$$

$$\beta_1 - es(\beta_1) t_{(\alpha/2;n-2)} \le \hat{\beta}_1 \le \beta_1 + es(\beta_1) t_{(\alpha/2;n-2)}$$

Indice di determinazione multipla R^2

è un indice della "bontà della retta di regressione nello spiegare la variabilità di Y mediante X

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$



$$R^2 = (r_{xy})^2$$

nel caso di regressione lineare semplice

$$r = \frac{C_{xy}}{s_x s_y}$$

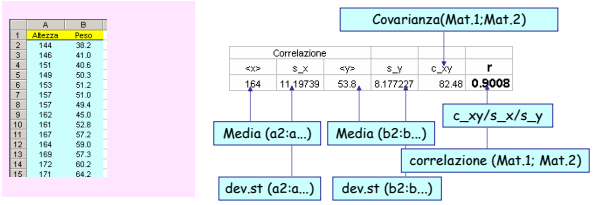
$$C_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$ Covarianza

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$ Deviazione standard

calcolare:

$$\bar{x},\ \bar{y},\ s_x,\ s_y,\ C_{xy}$$

	A	B
1	Altezza	Peso
2	144	38.2
3	146	41.0
4	151	40.6
5	149	50.3
6	153	51.2
7	157	51.0
8	157	49.4
9	162	45.0
10	161	52.8
11	167	57.2
12	164	59.0
13	169	57.3
14	172	60.2
15	171	64.2

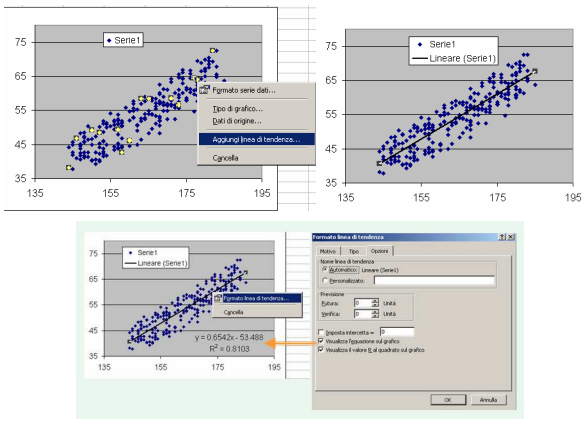


Quanto è significativa la correlazione?

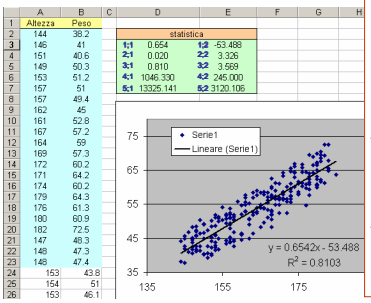
T-test sulla correlazione

$$t_\nu = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

Intervallo di confidenza per la correlazione



=INDICE(REGR.LIN(matr$_y$;matr$_x$;VERO;VERO);1;1)



1;1 m

2;1 s_m

2;1 b

2;2 s_b

3;1 r^2 : **coefficiente di determinazione**

4;1 F **osservato**

5;1 **somma della regressione dei quadrati**

3;2 **errore std per la stima di y**

4;2 **gradi di libertà**

5;1 **somma residua dei quadrati**

help

regr.lin

Statistica	Descrizione
s1;s2;...;sn	I valori di errore standard per i coefficienti m1;m2;...;mn
sb	Il valore di errore standard per la costante b (sb = #N/D quando cost è FALSO)
r2	Il coefficiente di determinazione. Confronta i valori y previsti con quelli effettivi e può avere un valore compreso tra 0 e 1. Se è uguale a 1, significa che esiste una correlazione perfetta nel campione, vale a dire, non sussiste alcuna differenza tra il valore previsto e il valore effettivo di y. Se invece il coefficiente di determinazione è uguale a 0, l'equazione di regressione non sarà di alcun aiuto nella stima di un valore y. Per ulteriori informazioni sul metodo di calcolo di r2, consultare "Osservazioni" più avanti in questo argomento.
sy	L'errore standard per la stima di y
F	La statistica F o il valore osservato di F. Utilizzare la statistica F per determinare se la relazione osservata tra le variabili dipendenti e indipendenti è casuale.
gdl	I gradi di libertà. Utilizzare i gradi di libertà per trovare i valori critici di F in una tabella statistica. Confrontare i valori trovati nella tabella con la statistica F restituita dalla funzione REGR.LIN per stabilire un livello di confidenza per il modello.
sqreg	La somma della regressione dei quadrati
sqres	La somma residua dei quadrati

La seguente illustrazione mostra l'ordine in cui vengono restituite le statistiche aggiuntive di regressione.

	A	B	C	D	E	F
1	m_n	m_{n-1}	...	m_2	m_1	b
2	se_n	se_{n-1}	...	se_2	se_1	se_b
3	r^2	se_y				
4	F	d_f				
5	ss_{reg}	ss_{resid}				