$$I = \int_a^b f(z)\, dz$$

$z = cx + d$

$z = 1 \longleftrightarrow x = b$

$z(x) = cx + d \Big|_{x=b} = 1 \Rightarrow cb + d = 1$

$\Big|_{x=a} = 0 \Rightarrow ca + d = 0$

$c = -\frac{d}{a}\Big|_{d = 1 - \frac{a}{b}} =$

$c = \frac{1-d}{b}$

$\frac{1-d}{b} = \frac{-d}{a}$

$\frac{1}{b} = d\left(\frac{1}{b-a}\right)$

$d = \frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$

$c = -\frac{1}{a}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$

$= -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

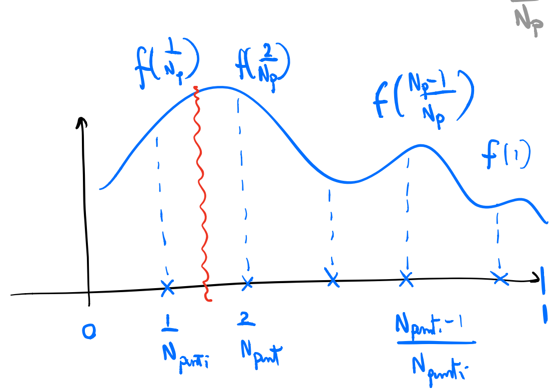
Senza perdita di generalità, posso fare un cambio di coordinate per cui qualunque integrale $\int_a^b f(z)\,dz$ si può risolvere come integrale in dominio $[0,1]$ di una opportuna variabile $x(z)$.

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

INTEGRAZIONE CLASSICA

Campionando la funzione in un numero N_p di punti su una griglia regolare equispaziata posso approssimare l'integrale I con una somma

$$I \simeq \sum_{i=1\dots N_p} f\left(\frac{i}{N_p}\right) \underbrace{\Delta x}_{\frac{1}{N_p}}$$



Nell'integrazione classica non privilegio nessun punto, infatti sommo su tutti i punti indiscriminatamente. Allo stesso tempo i punti sono <u>completamente</u> predeterminati e non ho sensibilità ai valori della funzione tra un punto e il successivo.

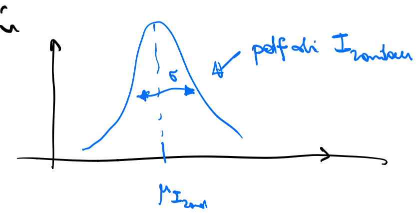
Che succede se i punti $x_i = \frac{i}{N_p}$ sono numeri random $\in [0,1]$?

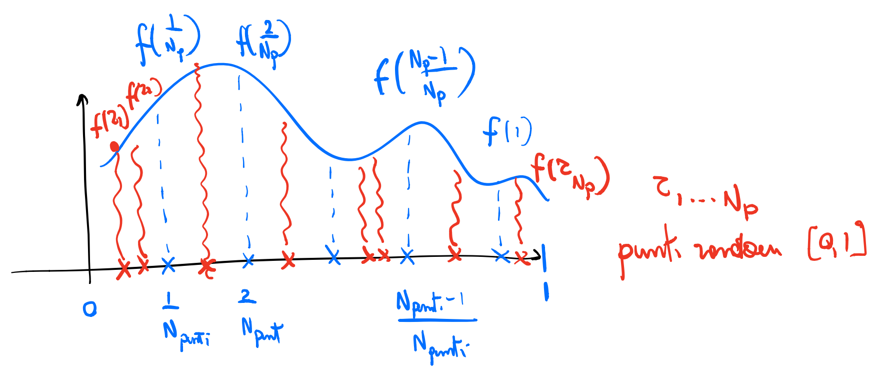
Anche in questo caso non ho privilegiato alcun punto particolare nell'intervallo $[0,1]$. Allo stesso tempo, poiché i punti non sono completamente pre-determinati, posso in principio essere sensibile al valore della funzione in qualunque punto in $[0,1]$ per qualunque numero di punti N_p che uso per approssimare l'integrale con una somma.

Sulla base di questa differente sensibilità all'andamento della funzione mi aspetto pro e contro da un integrale I_{random} rispetto a I classico.

Cambiamento molto importante: L'integrale fatto con N_p numeri random è anch'esso un numero random.

La densità di probabilità di questo numero I_{random} avrà un valore di aspettazione e una varianza per cui





$$I = \frac{1}{N_p}\sum_{\tau=1\dots N_p} f(\tau_i)$$

τ_i sono random in $[0,1]$ con pdf piatta

$$I_{classico} = E_f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|}\sum_{x_i \in \bar{x}} f(x_i)$$

dove $E(\bar{x})$ rappresenta la media su un insieme di punti $\bar{x}$

Nel caso dell'integrale classico $\bar{x} = \left\{\frac{1}{N_p}, \frac{2}{N_p}, \dots, 1\right\}$

$$I_{random} = \frac{1}{\|x\|}\sum_{x_i \in \bar{x}} f(x_i)$$

dove $\bar{x} = \{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{N_p}\}$

Dunque esiste una relazione tra il valore dell'integrale approssimato e la sequenza di punti in cui ho campionato la funzione f.

$$E_f\left(\left\{\frac{1}{N_p}, \frac{2}{N_p}, \dots 1\right\}\right) \to I_{classico}$$

$$E_f\left(\left\{z_1, z_2, \dots z_{N_p}\right\}\right) \to I_{random} \quad \text{con pdf}(\mu,\sigma)$$

Se

$\bar{x} \in [0,1]^{N_p} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ cioè un punto dentro l'ipercubo di lato 1 in $\mathbb{R}^{N_p}$

posso vedere l'integrale come una mappa tra $\bar{x}$ e $E_f(\bar{x})$

$$[0,1]^{N_p} \to \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \mapsto E_f(\bar{x}) \simeq I$$

Immagino di conoscere il valore vero I_{vero} dell'integrale e definisco un'altra mappa che mi restituisce la differenza tra I_{random} e I_{vero} e in particolare voglio una media rispetto alla scelta di $\bar{x}$ in $[0,1]^{N_p}$. In oltre perché cerco la media della pdf di I_{random} e la confronto con I_{vero}.

$$E_f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \sum_{x_i \in \bar{x}} f(x_i)$$

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \int d\bar{x} \left(E_f(\bar{x}) - I_{vero} \right)^2$$

media su $\bar{x}$

$f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$$= \int d\bar{x} \left(\frac{1}{\|\bar{x}\|} \cdot \sum_{x_i \in \bar{x}} \left\{ f(x_i) \right\} - I_{vero} \right)^2$$

$$\frac{\sum_{x_i \in \bar{x}} I_{vero}}{\|\bar{x}\|} = \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} I_{vero}$$

$$= \int d\bar{x} \left(\frac{1}{\|\bar{x}\|} \cdot \sum_{x_i \in \bar{x}} \left\{ f(x_i) - I_{vero} \right\} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \cdot \int d\bar{x} \, \frac{1}{\|x\|} \sum_{x_i \in \bar{x}} \left(f(x_i) - I_{vero} \right)^2$$

f_{medio}

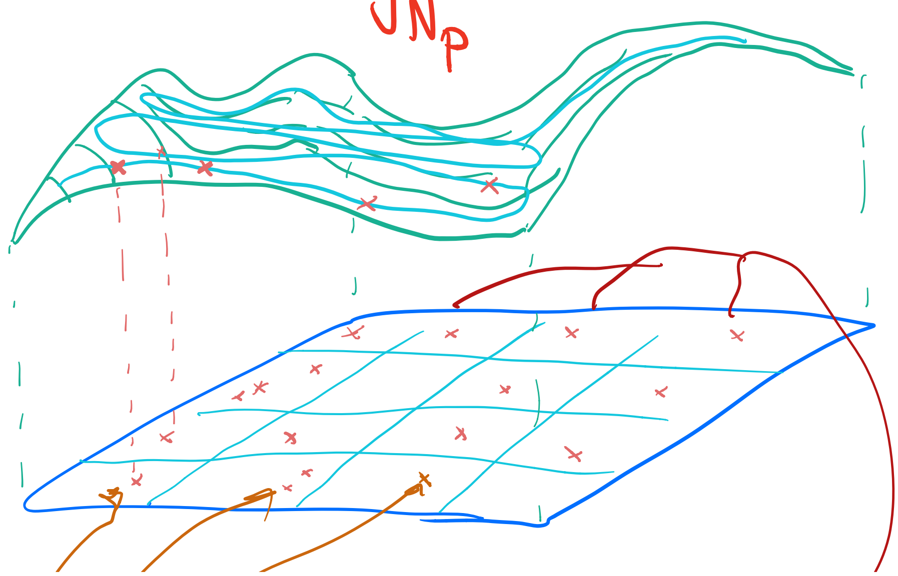
$$E_{\sigma^2}(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \sum_{x_i \in \bar{x}} \left(f(x_i) - I \right)^2$$ VARIANZA DI $f(x)$

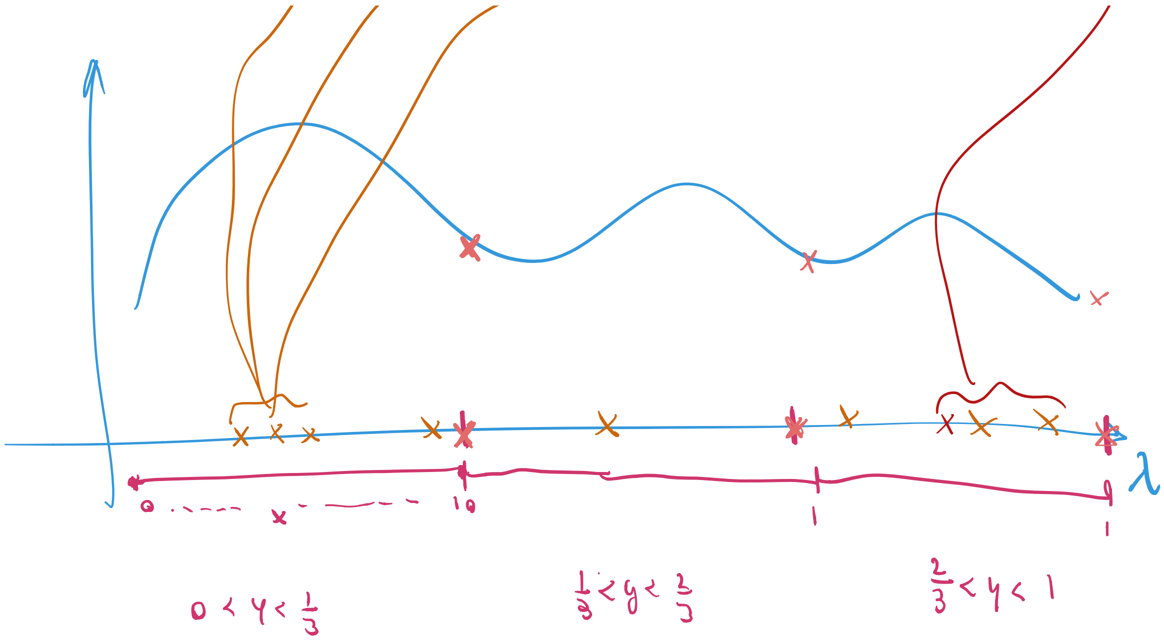
$$\langle \sigma^2 \rangle = \int E_{\sigma^2}(\bar{x})\, d\bar{x} = \int \frac{1}{\|\bar{x}\|} \sum_{x_i \in \bar{x}} \left(f(x_i) - I \right)^2 d\bar{x}$$

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \frac{1}{N_p} \langle \sigma^2 \rangle$$

In media l'integrale $I_{random}(N_p)$ si discosta da I_{vero} di una q.ta' $\Delta I = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle} = \frac{\text{standard-dev-di } f}{\sqrt{N_p}}$

$$\Delta I \propto \frac{1}{\sqrt{N_p}}$$





$$\Delta I_{\text{closure}} \sim \frac{1}{N^{1/d}}$$