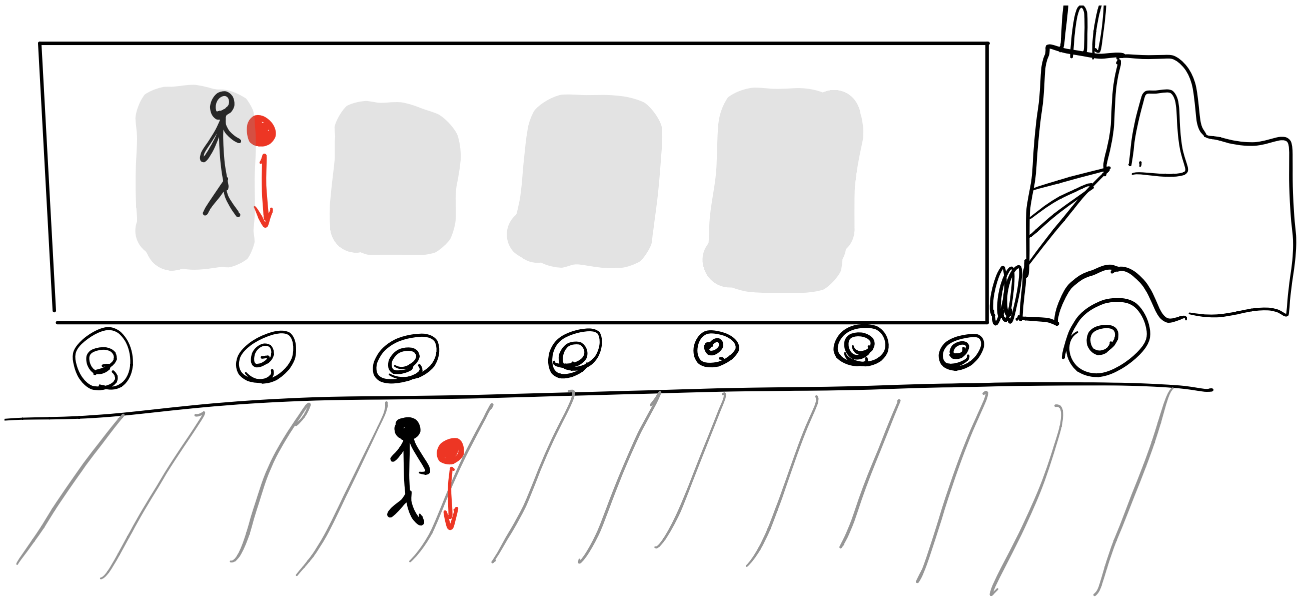
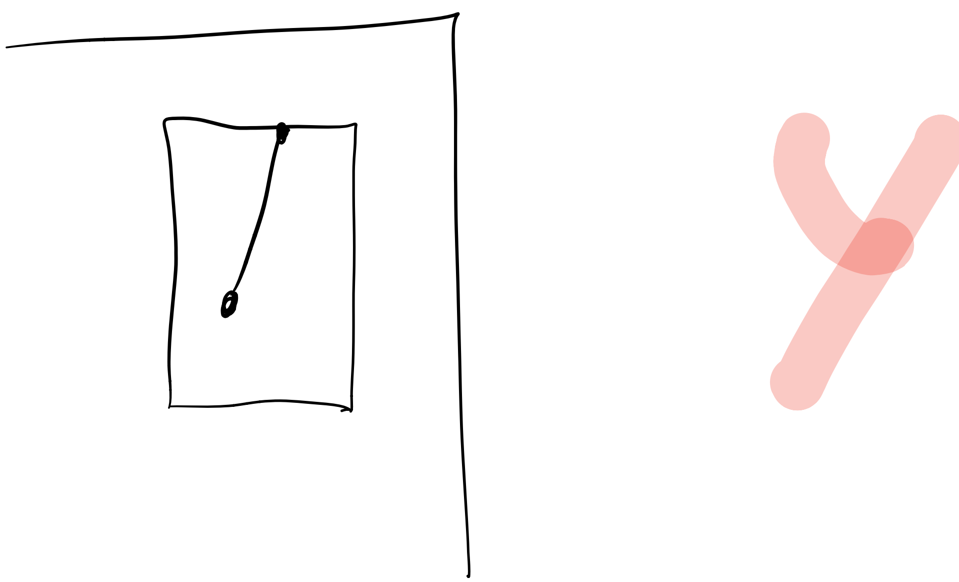
Osservazione:

due treni fermi al binario

non riusciamo a dire se ci stiamo muovendo noi oppure l'altro treno, FINO A CHE NON PERCEPIAMO UNA SPINTA. ENTRAMBE LE POSSIBILITÀ CI APPAIONO POSSIBILI PLAUSIBILI, E SVOLGERSI IN MODO REALISTICO e INDISTINGUIBILE





LE LEGGI DEL MOTO IN DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO CHE SONO

DIFFERENTI PER UNO SPOSTAMENTO DELL'ORIGINE

PER UNA ROTAZIONE DEGLI ASSI

PER UNA VELOCITÀ COSTANTE DELL'ORIGINE

SONO LE STESSE

INFATTI $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m a = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$

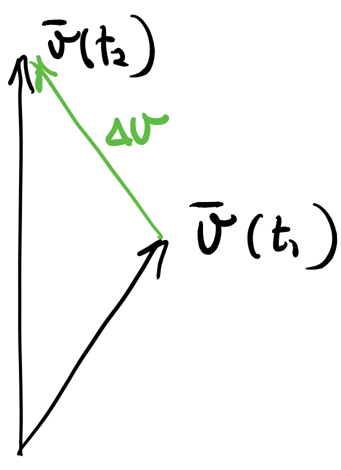
non cambia se $x \longmapsto x' = x + c$

o se $\bar{v}' = \bar{v} + \bar{\gamma}$

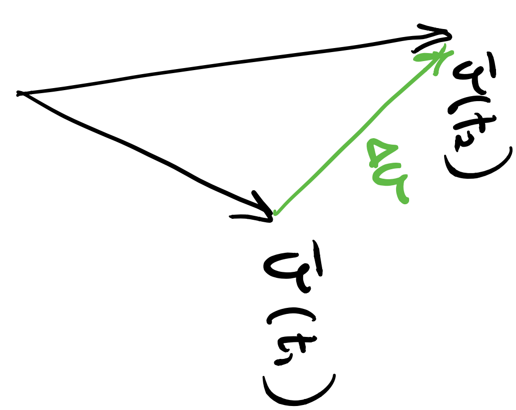
$\vec{v}'(t_1) - \vec{v}'(t_2) =$

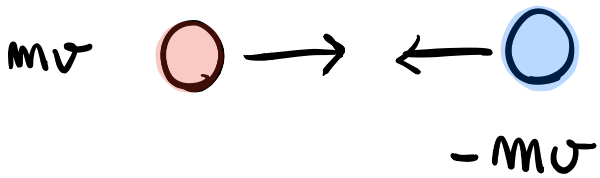
$\bar{v}(t_1) + \cancel{\bar{\gamma}} - \bar{v}(t_2) - \cancel{\bar{\gamma}}$

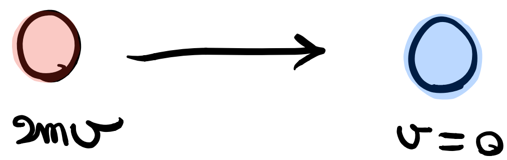
$\Delta \bar{v}' \equiv \Delta \bar{v}$

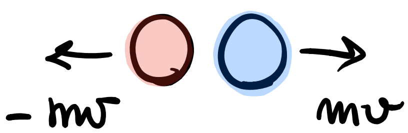


ROTAZIONE $\Rightarrow$

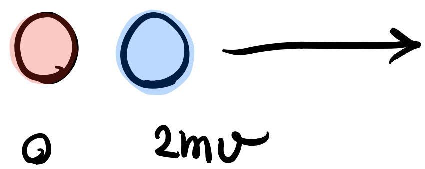








$\Delta v = -2v$ $\Delta v = 2v$



$$\begin{cases} 2\cancel{m}v = \cancel{m}v_1 + \cancel{m}v_2 \\ \frac{1}{2}\cancel{m}(2v)^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \end{cases}$$

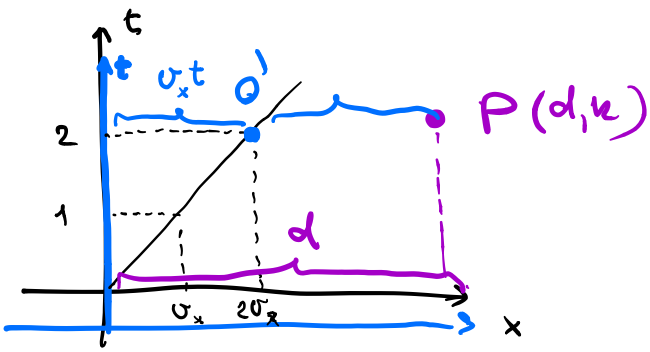
$$\begin{cases} v_1 = 2v - v_2 \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}4v^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}(2v - v_2)^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2v - v_2 \\ 0 = v_2^{\cancel{2}} - 4v \cdot \cancel{v_2} + v_2^{\cancel{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 2v - v_2 = 0 \\ v_2 = 2v \end{cases}$$

$2v \rightarrow 0$ $\Delta v = -2v$

$0 \rightarrow 2v$ $\Delta v = 2v$



$$P = (d, k)$$

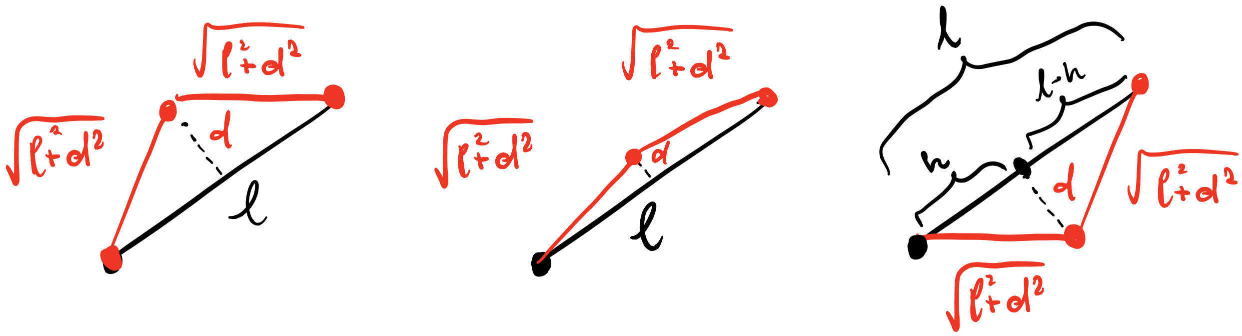
$$O \quad \bar{v} = \bar{0}$$

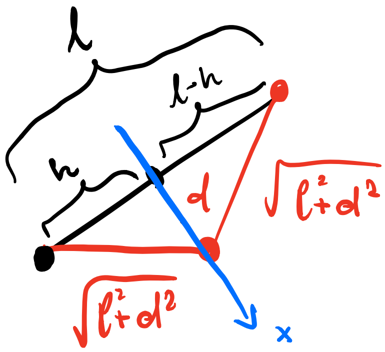
$$O' \quad \bar{v} = (0, v_x)$$

$$O'_0 = (v_x \cdot t, 0)$$

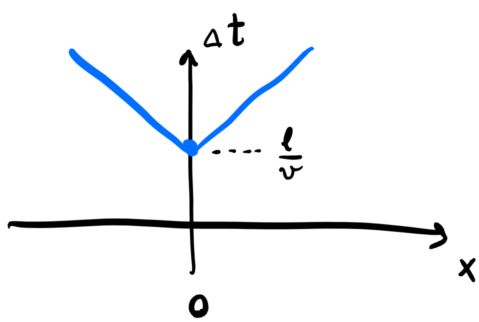
$$P = (d - v_x t, k)$$

SHORTEST PATH @ $v = \text{const} \Rightarrow$ least Δt



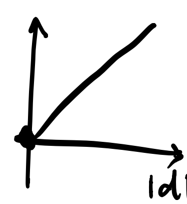


$$\Delta t = \frac{\overbrace{\sqrt{(\ell-k)^2+x^2}+\sqrt{k^2+x^2}}^{\Delta \ell}}{v}$$

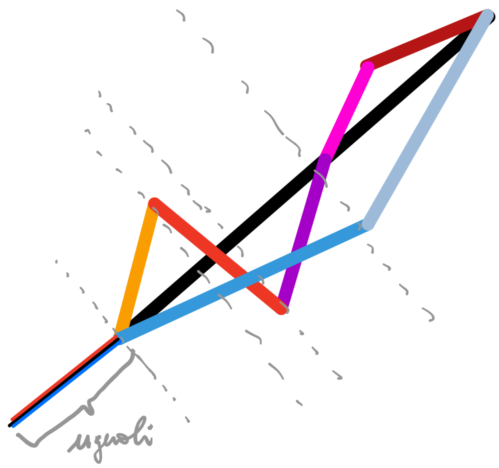


area del triangolo

$$A = d\cdot\frac{(\ell-k)}{2} + \frac{d}{2}k = \frac{d\cdot\ell}{2}$$



$$A_{min} = A(d=0) = 0 \quad \forall k$$

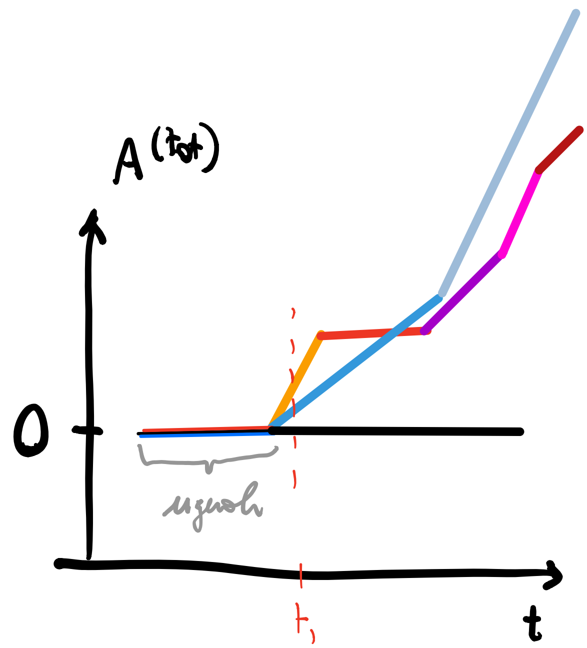


$$A^{tot,1} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A^{tot,2} = A_1 + A_2$$

$$A^{tot,1} = A_{uguale} + A^{tot,1}$$

$$A^{tot,2} = A_{uguale} + A^{tot,2}$$



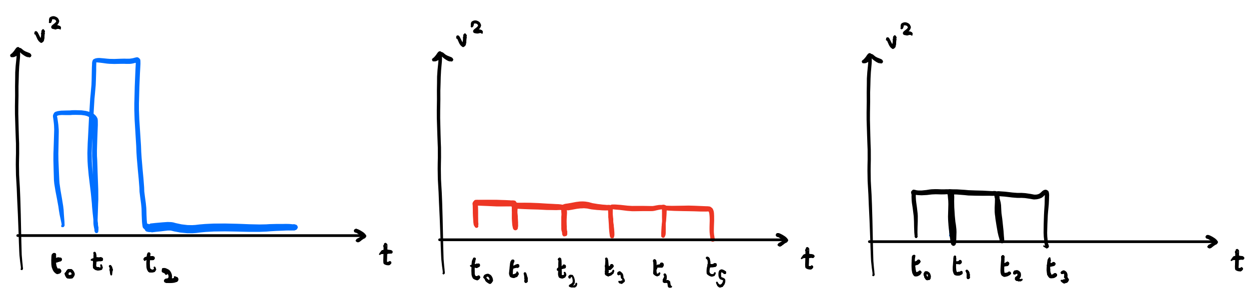
sotto l'assunzione di $v = const$ è effettivamente così

ma che succede se $v \neq const$? in altre parole cosa somma $\sum_i A_i$?

COSA C'È NEL A_i?

$\bar{v}$ impulso $\longrightarrow$ è un vettore, dunque punta
non va bene perché una q.tà che punta è diversa se la guardo da direzioni diverse, mentre tutti siamo d'accordo sul risultato anche se lo guardiamo da direzioni diverse

$|v|^2 \propto$ energia cinetica : siccome $|v|^2$ non è un vettore ma uno scalare, è una q.tà su cui siamo tutti d'accordo



essendo un energia saprei pure cosa fare se nel mio problema ci fosse una energia potenziale

$$A = \sum_i v_i^2 \Delta t$$

Δt ci deve essere anche se v_i = const

abbiamo visto che si realizza il cammino del tempo più corto

$$x_i \to x_i + \epsilon_i$$

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \to v_i + \frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}{\Delta t}$$

$\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ manuale trasformazione di Poincaré

$$A = \sum_i v_i^2 + 2 v_i \frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}{\Delta t} + \ldots$$

$O(\epsilon^2)$

zero se fosse una manuale trasformazione di Poincaré

$$\underbrace{\frac{-v_i \epsilon_i + v_{i-1} \epsilon_i}{\Delta t} = \frac{-\epsilon_i \Delta v_i}{\Delta t}}$$

$$A = v_N \epsilon_{N+1} - v_1 \epsilon_1 + \sum_i \overbrace{-\epsilon_i \frac{\Delta v_i}{\Delta t} + v_i^2}^{\text{libertà di cambiare } \epsilon_i}$$

nella parte centrale del cammino

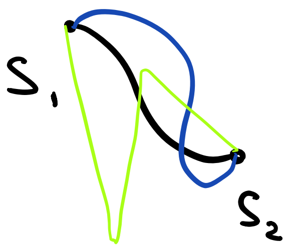
$$v_1(\epsilon_2 - \epsilon_1) + v_2(\epsilon_3 - \epsilon_2) = \epsilon_2 \frac{(v_2 - v_1)}{\Delta t} \underbrace{- v_1 \epsilon_1 + v_2 \epsilon_3}_{\text{cond. iniziali}}$$

se per qualunque ϵ_i ho $\epsilon_i \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = 0$

deve essere $\frac{\Delta v_i}{\Delta t} = 0$ ovvero $p = mv$ è conservato

LA CONSERVAZIONE SEGUE DALL'INVARIANZA DI A QUANDO $x \to x + c$

$$S'_{AB} = \int_A^B dt \overbrace{\left[L + \frac{d}{dt} f\right]}^{L'} = S_{AB} + f(A) - f(B)$$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + c(t) \\ \dot{x}' &= \dot{x} + \dot{c} \end{aligned}\right] \text{ trasformazione di Poincaré}$$

$$\Delta L = m \dot{x} \Delta \dot{x} = m \dot{x} \dot{c}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m \dot{x} c\right)}_{\text{irrelevant}} - \frac{d}{dt}\left(m \dot{x}\right) c$$

$$\Delta L = 0 \quad \forall c \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m \dot{x}\right) = 0$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

$$x' = x + c \qquad y' = y \qquad z' = z$$

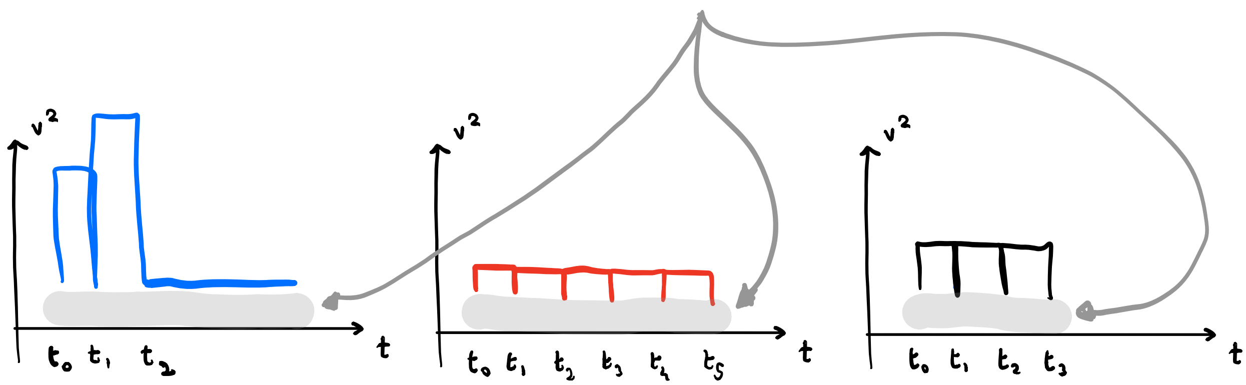
P_x è conservato

$$x' = x \qquad y' = y + c \qquad z' = z$$

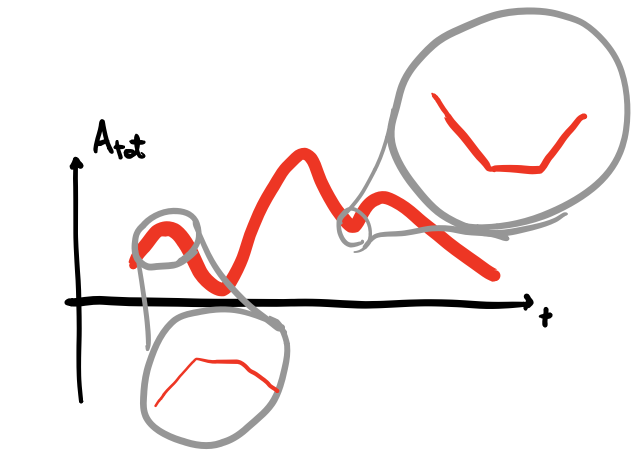
P_y è conservato

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = z + c$$

P_z è conservato



v2
t
t0 t1 t2
v2
t
t0 t1 t2 t3 t4 t5
v2
t
t0 t1 t2 t3



MASSIMO $\nearrow$ $\searrow$ $\Rightarrow$ ci deve essere un punto in cui non sale né scende

prima sale — dopo scende

MINIMO $\searrow$ $\nearrow$ $\Rightarrow$ ci deve essere un punto in cui non sale né scende

prima scende — poi sale

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2v} \quad \frac{2x}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{(l-h)^2+x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} = \frac{dL}{dx} \qquad L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = 0 \implies$$ mv è costante nel tempo

Equazione del Moto

ma da dove viene questo "invariante"?

MOMENTO ANGOLARE

$$\begin{cases} z = z \\ x = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ y = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$$

$\vartheta \to 0$

$$\begin{cases} v_z = v_z \\ v_x = v_x \underbrace{\cos\vartheta}_{1} + v_y \underbrace{\sin\vartheta}_{\vartheta} + x \underbrace{\sin\vartheta}_{\vartheta}\cdot\dot\vartheta + y \underbrace{\cos\vartheta}_{1}\cdot\dot\vartheta \\ v_y = -v_x \underbrace{\sin\vartheta}_{\vartheta} + v_y \underbrace{\cos\vartheta}_{1} - x\underbrace{\cos\vartheta}_{1}\cdot\dot\vartheta + y\underbrace{\sin\vartheta}_{\vartheta}\cdot\dot\vartheta \end{cases}$$

$O(\vartheta)$ $O(\vartheta)$ $O(\vartheta^\circ)$

$$L' = L = \frac{1}{2}m\left[v_x^2c^2 + v_y^2s^2 + \cancel{2v_xv_y cs} + v_x^2s^2 + v_y^2c^2 - \cancel{2v_xv_y cs}\right] = \frac{1}{2}(m v_x^2 + v_y^2)$$

$$\Delta L = m v_x \Delta v_x + m v_y \Delta v_y$$

$$= m v_x\left[\cancel{v_y\cdot\vartheta} + \overset{O(\vartheta)}{x\vartheta\dot\vartheta} + \overset{O(\vartheta^\circ)}{y\dot\vartheta}\right]$$

$$+ m v_y\left[-\cancel{v_x\vartheta} - \overset{O(\vartheta^\circ)}{x\dot\vartheta} + \overset{O(\vartheta)}{y\vartheta\cdot\dot\vartheta}\right] =$$

$$= \underbrace{m v_x[\cancel{x\vartheta} + y]\dot\vartheta} + \underbrace{m v_y[-x + \cancel{y\vartheta}]\dot\vartheta} =$$

$$= \cancel{\frac{d}{dt}\left(m v_x[x\vartheta + y]\vartheta\right)} - \frac{d}{dt}\left(m v_x(\cancel{x\vartheta} + y)\right)\vartheta$$

$$\cancel{+\frac{d}{dt}\left(m v_y\left(-x+y\vartheta\right)\vartheta\right)} - \frac{d}{dt}\left[m v_y\left(-x+\cancel{y}\vartheta\right)\right]\vartheta$$

$$\frac{d}{dt}\left(m v_x y - m v_y x\right) = 0 + O(\vartheta) \quad +$$

Analytic Mechanics would argue that

$$I(q,\dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f}{\partial s}(q_i, 0)$$ is an "first integral"

a conserved quantity

if $Q_s = f(q, s)$ leaves L invariant

$$L(Q_s, \dot{Q}_s) = L(q, \dot{q}) \quad \forall s$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = m q_i$$

$$f_{trans}: q \mapsto q + s \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial s}(q, s)\right|_{s=0} = 1$$

$$I(q, \dot{q}) \overset{f_{trans}}{=} m\dot{q}$$

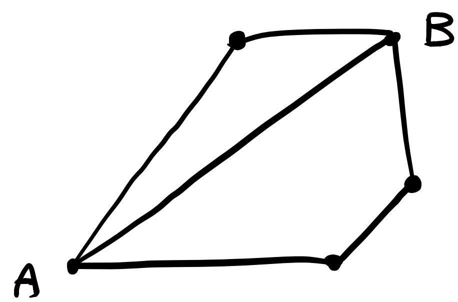
$$f_{rot}: \quad x' = x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta$$
$$y' = -x \operatorname{sen}\vartheta + y \cos\vartheta$$

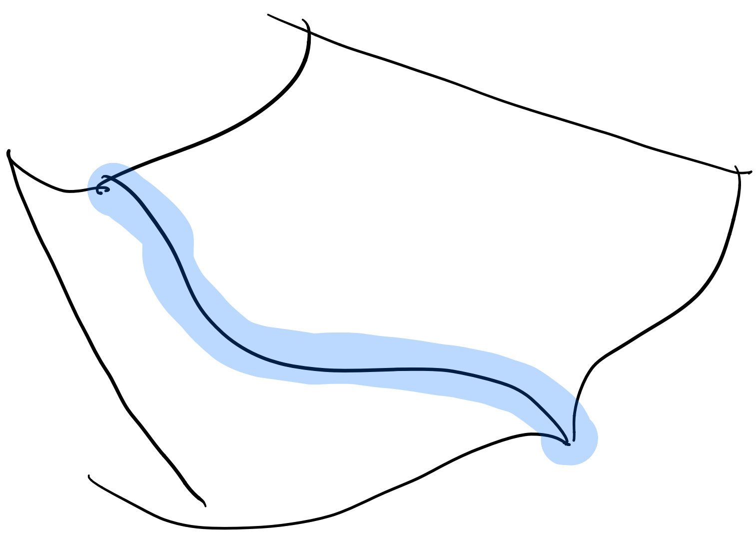
$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=0} = \begin{cases} y \\ -x \end{cases}$$

$$I^{f_{rot}} = P_x y - P_y x$$

angular momentum

$$\delta S = 0$$





$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi \quad \Longrightarrow \quad T^{\mu}{}_{\nu} = \begin{matrix} E^2 & E p_x & E p_y & E p_z \\ E p_x & p_x^2 & p_y p_x & p_z p_x \\ E p_y & p_x p_y & p_y^2 & p_z p_y \\ E p_z & p_x p_z & p_y p_z & p_z^2 \end{matrix}$$