

IL RAPPORTO SEGNALE/RUMORE NEI DATI CCD

In tutte le misure fisiche la precisione associata alla misura è altrettanto importante che la misura stessa. La precisione è misurata dall'indeterminazione (errore) associata alla misura. Per motivi storici l'errore associato alle misure elettriche ed elettroniche è chiamato Rumore (Noise) con evidente riferimento al "disturbo" associato alla ricezione di un segnale elettrico.

La qualità di una misura è definita in termini dell'errore percentuale, ovvero del rapporto tra la precisione e il valore della misura stessa: minore è questo rapporto migliore è la misura.

Normalmente si utilizza l'inverso di questa quantità, ovvero il rapporto tra Segnale e Rumore, normalmente scritto S/N (Signal to Noise, o anche SNR, Signal to Noise ratio).

Maggiore è il rapporto S/N migliore è la misura.

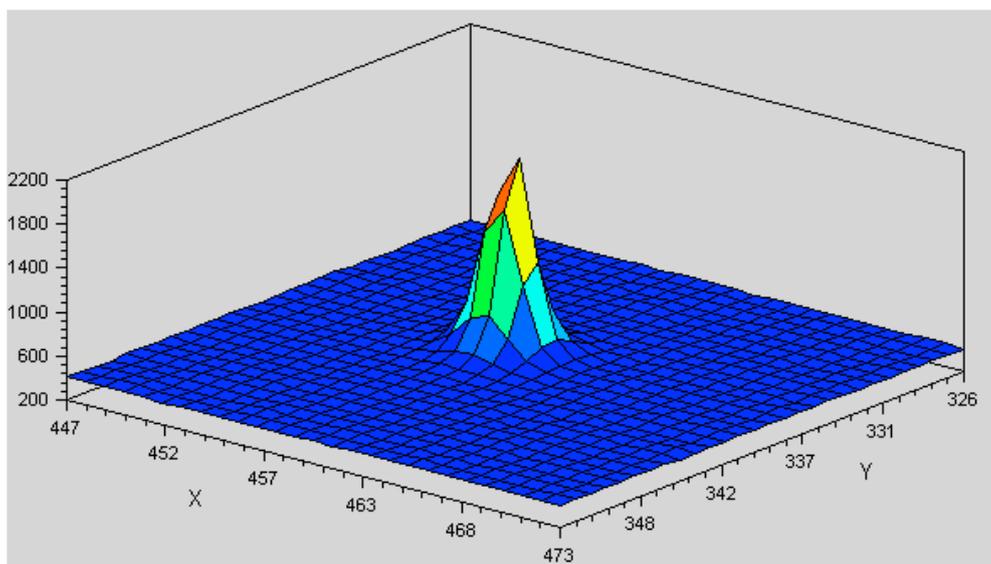
Anche nell'acquisizione dati con CCD si punta ad ottenere il migliore S/N possibile.

Per poter scrivere l'espressione del rapporto S/N per un CCD è necessario definire cosa è il Segnale e quali sono i contributi del rumore.

1. Il Segnale

In genere il segnale è costituito dai fotoni che ci provengono da un oggetto astronomico. Per fissare le cose consideriamo inizialmente il segnale proveniente da una stella.

Questo segnale si distribuisce su di un certo numero di pixel con una certa distribuzione d'intensità :



Sul piano del CCD la distribuzione del segnale sarà approssimativamente circolare e il numero dei pixel interessati sarà legato alla larghezza angolare della distribuzione d'intensità¹ e al campionamento dell'accoppiata telescopio-CCD (arcsec/pixel).

La larghezza angolare dipende in linea di principio dalle caratteristiche ottiche del sistema (tra cui, in primo luogo, la risoluzione), ma in genere è determinata dalle condizioni di seeing.

In genere, nelle misure fotometriche, si definisce un'area circolare (con un raggio r espresso in pixel) che contiene tutto il segnale della stella e si contano gli elettroni prodotti dai fotoni che hanno colpito tutti i pixel contenuti nell'area.

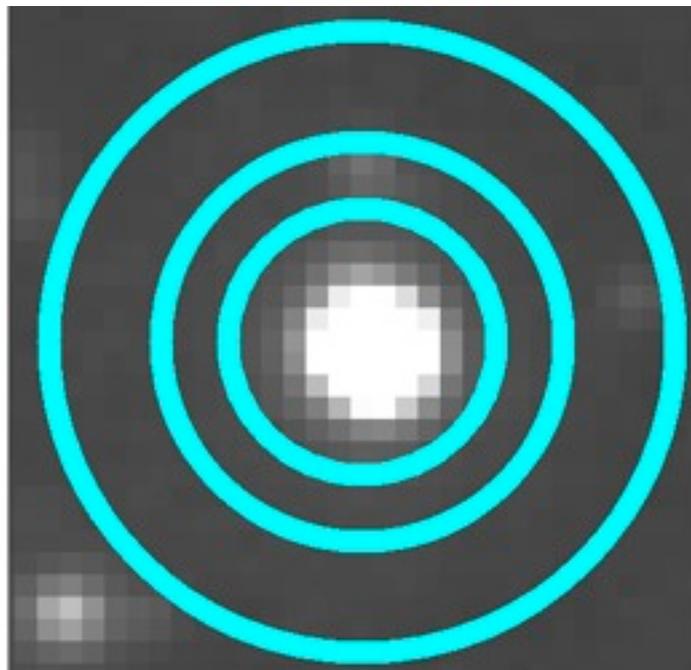


Figura 1. Lo “strumento” tipico della fotometria di apertura: il segnale viene misurato sommando tutti i conteggi dei pixel contenuti nel cerchio più interno. La corona circolare più esterna è usata per misurare il background dovuto al fondo-cielo. La zona intermedia serve a separare le due zone in maniera che la misura del fondo-cielo non sia contaminata dal flusso della stella.

Se N_i è il numero di elettroni contenuto nell' i -esimo pixel, il segnale è:

$$S = \sum_{i=1}^n N_i$$

in cui n è il numero di pixel contenuti nell'area circolare.

Ma in ogni pixel sono raccolti anche un certo numero di fotoni provenienti dal fondo-cielo che si aggiungono ai fotoni del segnale. Se B è il valore medio del contributo del fondo-cielo (elettroni/pixel), allora il contributo effettivo della stella al segnale è:

¹ Con buona approssimazione si può considerare questa distribuzione come Gaussiana

$$S = \sum_{i=1}^n N_i - n \cdot B \quad (1)$$

Nel caso di un oggetto esteso possiamo essere interessati a come varia il segnale segnale pixel per pixel e pertanto nella precedente espressione $n=1$.

2. I contributi al Rumore

2.1. Contributi di sorgente

Anche in assenza di altri contributi al Noise (rivelatore ideale) in ogni caso il segnale stesso è soggetto a una indeterminazione intrinseca.

Infatti il flusso di fotoni proveniente da una sorgente (fotoni al secondo) ha un carattere statistico che è descritto da una distribuzione di Poisson. Se misuriamo più volte lo stesso segnale non otterremo mai lo stesso numero, ma la nostra misura si distribuirà attorno a un valore medio $\langle N \rangle$ con uno scarto quadratico medio dato da²:

$$\sigma_N = \sqrt{\langle N \rangle}$$

Lo stesso discorso vale anche per i fotoni di fondo-ciolo.

Pertanto, se N_* è il numero totale di fotoni provenienti dalla stella (numero dei conteggi nei pixel nell'area circolare meno il contributo del fondo-ciolo) e N_s è il valore medio per pixel dei fotoni di fondo-ciolo, i due contributi di “sorgente” al rumore, sono:

$$\sigma_{N_*} = \sqrt{N_*} \rightarrow \sigma_{N_*}^2 = N_* \quad (2)$$

e

$$\sigma_B^2 = n \cdot \sigma_{N_s}^2 = n \cdot N_s \quad (3)$$

Per poter misurare il contributo del fondo-ciolo è necessario usare un'area del CCD non interessata al contributo di altre sorgenti. In genere, quando i campi stellari non sono troppo affollati, si usa una corona circolare che circonda l'area circolare in cui si misura il flusso della stella. Per evitare possibili contaminazioni del flusso della stella, questa corona circolare è separata dell'area centrale da un'ulteriore corona circolare che isola le due zone di misura.

La figura 1 mostra un tipico strumento fotometrico digitale, con il cerchio interno (in cui avviene la misura), la corona circolare di separazione e la corona circolare esterna

² Ricordiamo che questa relazione tra media e scarto quadratico medio vale solo per la distribuzione di Poisson. Quando N è molto grande la distribuzione di Poisson si può approssimare con una curva di Gauss, ma per una distribuzione gaussiana generica NON vale la relazione precedente.

in cui viene misurato il fondo-cielo. Questa tecnica si chiama “fotometria d’apertura”. Si usano anche tecniche più complesse, che non tratteremo qui, che si basano sulla ricostruzione della psf della stella, utili soprattutto per campi stellari molto affollati, dove non c’è spazio per misurare il background.

E’ evidente, dalla (3), che minore è il numero di pixel su cui si eseguono le misure minore è il contributo del rumore dovuto al fondo-cielo. D’altro canto se si utilizza un numero n troppo piccolo (raggio del cerchio piccolo) si rischia di tagliare fuori anche una frazione significativa del segnale. E’ possibile calcolare quale è il valore ottimale in pixel del raggio dell’apertura (non lo faremo qui). In pratica, se non si stanno misurando stelle troppo deboli, conviene utilizzare un raggio che contenga sicuramente tutto il flusso della stella. Una volta fissato il raggio dello strumento di apertura questo NON va modificato all’interno di un set di misure.

2.2. Contributi del rivelatore

Nel caso ideale, considerando soltanto gli inevitabili contributi statistici della sorgente e del fondo-cielo, il rapporto S/N, sarebbe dato da:

$$S / N = \frac{N_*}{\sqrt{N_* + n \cdot N_s}}$$

Ma l’elettronica del CCD introduce altri contributi al rumore.

2.2.1 Rumore termico

A causa dell’agitazione termica in ogni pixel avviene la produzione di una corrente elettrica (elettroni per pixel al secondo) che in un certo tempo produce l’accumulo di una carica. Il pattern termico dovuto a questa carica costituisce il Dark Frame, che come abbiamo visto viene sottratto a ogni immagine CCD nel corso della riduzione dei dati. Poiché il numero n di coppie prodotte dipende fortemente dalla temperatura, secondo la relazione:

$$n = A \cdot T^{3/2} \exp(-E_g / KT)$$

(dove T è la temperatura in Kelvin, A è una costante che dipende dal materiale, K la costante di Boltzmann e E_g l’energy gap del semiconduttore) si lavora sempre a temperature relativamente basse.

La fluttuazione statistica della carica prodotta dalla corrente termica costituisce il rumore termico (Dark Noise). Se N_D è il numero medio di elettroni termici per pixel, il contributo di rumore termico alla lettura del segnale della stella è dato da:

$$\sigma_D^2 = n \cdot N_D \tag{4}$$

Anche in questo caso, il contributo al rumore dipende anche dal numero di pixel utilizzato per la lettura del segnale.

2.2.2. Rumore di lettura

Ogni qual volta un pixel viene letto l'elettronica di lettura (in particolare il pre-amplificatore di uscita) introduce un rumore di lettura RN (espresso in elettroni). RN è lo scarto quadratico medio associato in lettura a un segnale in ingresso supposto costante. Questa fluttuazione non è legata ai conteggi, ma dipende dalle caratteristiche dell'elettronica e delle modalità di lettura. Il contributo di RN alla lettura di n pixel è dato quindi da:

$$\sigma_{RN}^2 = n \cdot RN^2 \quad (5)$$

3. Il Noise totale

Mettendo insieme i diversi contributi al rumore e ricordando che lo scarto quadratico medio totale è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati degli scarti dei singoli contributi, si ottiene:

$$N = \sqrt{N_* + n(N_s + N_D + RN^2)}$$

Se N_* è il segnale della stella, l'espressione generale del Rapporto S/N è data da:

$$\frac{S}{N} = \frac{N_*}{\sqrt{N_* + n(N_s + N_D + RN^2)}} \quad (6)$$

Se il numero di fotoni raccolti dalla stella è molto grande, tale che:

$$N_* \gg n(N_s + N_D + RN^2)$$

allora:

$$\frac{S}{N} \approx \frac{N_*}{\sqrt{N_*}} = \sqrt{N_*}$$

e il rapporto S/N dipende dalla radice dei conteggi, come nella situazione ideale in cui non ci sono altri contributi. In questo caso si dice che la nostra misura è “*source-limited*”.

Se invece a dominare è il contributo di fondo-ciolo:

$$\frac{S}{N} \approx \frac{N_*}{\sqrt{nN_s}}$$

si dice che siamo “*sky-limited*”.

Il numero N di elettroni (o di conteggi) dipende dal tempo d’integrazione. Infatti, se F_* è il flusso della stella e F_s quello del fondo-ciolo³:

$$N_* = F_* t$$

$$N_s = F_s t$$

Inoltre, se I_D è la corrente termica, allora:

$$N_D = I_D t$$

Pertanto si può scrivere la (6) come:

$$\frac{S}{N} = \frac{F_* \cdot t}{\sqrt{F_* \cdot t + n(F_s \cdot t + I_D \cdot t + RN^2)}} \quad (7)$$

Da questa equazione si vede come per brevi tempi d’integrazione il rumore di lettura può fornire un contributo importante.

Al crescere del tempo d’integrazione (se la corrente termica è resa trascurabile lavorando a bassa temperatura) i contributi dominanti diventano quelli di fondo-ciolo e di sorgente.

Nel caso source-limited si vede facilmente che S/N è semplicemente proporzionale alla radice del tempo di esposizione.

Tuttavia, in certe condizioni, a esempio in caso di basso fondo-ciolo (cieli bui) e di sorgenti deboli il contributo di RN può non essere trascurabile anche per tempi di esposizione relativamente lunghi e può diventare il fattore limitante nel rapporto S/N. In questi casi si cerca di allungare il tempo di esposizione in maniera da riportarsi nella condizione source-limited (o sky-limited).

Per fare un esempio concreto prendiamo in considerazione alcuni valori reali:

$$F_s = 19 \text{ (conteggi/s, ADU/s)}$$

³ Una volta fissato l’apparato sperimentale - essenzialmente l’apertura del telescopio - il flusso si esprime semplicemente in fotoni/secondo per quell’apparato

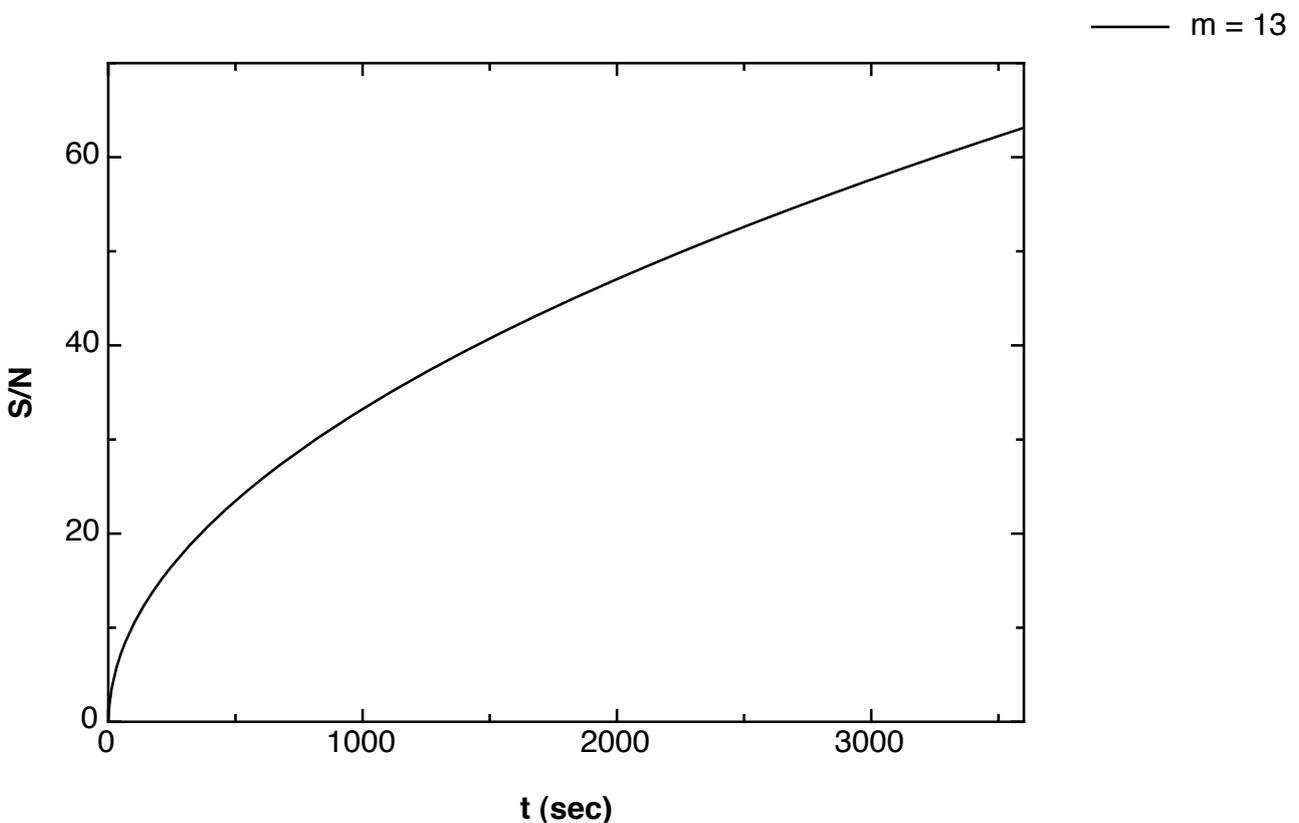
RN = 7 (conteggi)

$F_* = 33$ (counts/s)

Questi valori - indicativi - sono relativi all'accoppiata telescopio-ccd: Rifrattore da 75 mm + Camera Sbig ST-8XME, dal Dipartimento, fotografando in banda V a un'altezza sull'orizzonte di circa 45° . Il flusso corrisponde a quello di una stella di magnitudine 13.

Consideriamo trascurabile la corrente termica e supponiamo di raccogliere il segnale della stella su 50 pixel (raggio dell'apertura fotometrica circa 4).

La figura che segue mostra l'andamento del rapporto segnale-rumore in funzione del tempo di esposizione. Come si vede, dopo un tempo di esposizione di 1 ora (3600 s) si raggiunge con questo apparato e per questa magnitudine, un S/N di circa 60.



E' utile esprimere la (7) in funzione della magnitudine. Ricordando, dalla fotometria, che:

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{F_0}{F}$$

e, invertendo la relazione, si ottiene:

$$F(m) = F_0(m_0)10^{-0.4(m-m_0)}$$

Inserendo F(m) nella (7) si ricava:

$$\frac{S}{N} = \frac{F_0(m_0)10^{-0.4(m-m_0)} \cdot t}{\sqrt{F_0(m_0)10^{-0.4(m-m_0)} \cdot t + n(F_S \cdot t + I_D \cdot t + RN^2)}} \quad (8)$$

In questo modo, una volta calibrato l'apparato sperimentale - misurando RN e I_D per il CCD e il flusso di fondo-cielo F_S - misurando il flusso di una stella di magnitudine nota, è possibile ottenere il tempo necessario per raggiungere un certo rapporto S/N per una data magnitudine. Tipicamente questa operazione va fatta in ognuna delle bande fotometriche utilizzate (cambia il flusso di fondo-cielo e la calibrazione in magnitudine).

Piuttosto che esplicitare la (8) rispetto al tempo, conviene fare un grafico e stimare il tempo dal grafico. Parliamo di stima, in quando i parametri di calibrazione - a parte il RN e la corrente termica che possono essere misurati in laboratorio con una certa precisione - dipendono criticamente dal cielo di quella serata, dall'altezza sull'orizzonte e da altri fattori non sempre controllabili. Una calibrazione precisa andrebbe fatta la sera stessa dell'osservazione, in un tempo abbastanza vicino, nello stesso campo fotografato, etc. Ma vi assicuro che, a meno che non vogliate ottenere precisioni molto elevate, una stima è più che sufficiente!

La (8) può essere utilizzata anche per stimare la **magnitudine limite**, raggiungibile con un certo apparato e un certo tempo di esposizione.

La magnitudine limite è fissata dalla precisione della nostra misura, ovvero dal rapporto S/N che vogliamo ottenere⁴, tramite la relazione:

$$\sigma_m = \frac{1.08}{S/N}$$

Fissato il tempo t e riportando su grafico la (8) in funzione di m si ottiene il valore di m corrispondente al valore di S/N prefissato.

Nella figura che segue è riportata la (8) per le stesse condizioni sperimentali e di calibrazione dell'esempio precedente e per un tempo di esposizione di 3600 s. Si può facilmente notare che la "soglia di rivelazione" in questo caso (segnale dello stesso ordine di grandezza del rumore) è attorno alla 17^a magnitudine, anche se già dalla 15^a la precisione della misura può considerarsi abbastanza scadente (S/N = 10).

⁴ in ogni caso, quando S/N = 1, non siamo più in grado di distinguere la stella dal rumore ! In genere un valore minimo pratico per riuscire a vedere una stella è S/N = 3, anche se in questo caso la nostra misura di flusso (e quindi di magnitudine) sarà estremamente imprecisa

