Elementi di Misure Elettroniche
E. Silva - a.a. 2016/2017
Parte 2.5

Rumore elettrico.
Riduzione del rumore.

v. 1.0

Riferimenti:

Lezioni dal corso ME365, Purdue University, https://engineering.purdue.edu/ME365/Textbook/chapter11.pdf

Approfondimenti:

G. V. Pallottino, "Appunti di Elettronica", parte IX,
http://www.phys.uniroma1.it/biblioteca/web_disp/d2/dispense/pallottino/9elettronica_gvp.pdf

G. V. Pallottino "Il rumore elettrico - Dalla fisica alla progettazione", Springer, 2011

Introduzione

- Ogni misurazione è affetta da *rumore*.
- Rumore: componente non stazionaria del segnale, per cui il valore *istantaneo* differisce dal "valore vero" (con tutte le cautele nell'impiego di questa dizione).
- Rumore dovuto a *fluttuazioni* (termiche, quantistiche...)
- *Disturbi* dall'ambiente esterno (es.: accoppiamento capacitivo o induttivo fra circuiti, interferenze radio, vibrazioni meccaniche)

Esempio di un segnale sinusoidale con rumore casuale di diversa entità sovrapposto

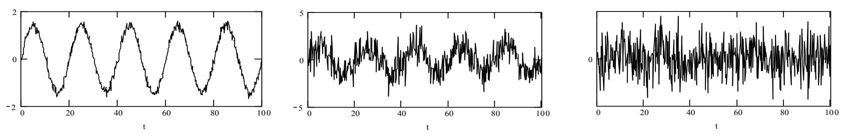


Figura adattata da G.V. Pallottino, op. cit.

Rumore casuale

Il rumore è in molti casi *casuale* → descrizione statistica
→ Importanza dei *valori medi*
→ Descrizione nel dominio della frequenza

Potenza del segnale:
(se x è una tensione, la si immagina applicata a una resistenza di 1 Ω))

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} x^2(t)dt \underset{\text{teorema di Parseval}}{=} \int_0^\infty \underbrace{\phi_x(f)}_{\text{Densità spettrale di potenza}} df$$

ϕ_x mostra come la potenza media del segnale $x(t)$ sia distribuita su un certo intervallo di frequenze.

Rumore $n(t)$ sovrapposto al segnale $s(t)$: $x(t) = s(t)+n(t)$.
(*additivo*: non è sempre il caso)

Se $s(t)$ e $n(t)$ sono scorrelati (indipendenti): $\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} s(t)n(t)dt = 0$

→ $\overline{x^2(t)} = \overline{s^2(t)} + \overline{n^2(t)}$

Rumore casuale *n(t)*

richiami di proprietà statistiche

Valore quadratico medio: $\sqrt{\overline{n^2(t)}}$

Media (statistica): μ_n
(spesso vale zero)

varianza: $\sigma_n^2 = \overline{n^2(t)} - \mu_n^2$

ovvero $\overline{n^2(t)} = \sigma_n^2 + \mu_n^2$

Media nulla → varianza corrisponde al valore quadratico medio.

Rapporto segnale/rumore

SNR (o S/N): "Signal to Noise Ratio"

$$S/N = \frac{\overline{s^2(t)}}{\overline{n^2(t)}}$$

potenza del segnale

potenza del rumore

Si misura in dB: $$S/N|_{dB} = 10\log\frac{\overline{s^2(t)}}{\overline{n^2(t)}} = 20\log\frac{\sqrt{\overline{s^2(t)}}}{\sqrt{\overline{n^2(t)}}}$$

potenze

ampiezze
(valori quadratici medi,
rms: "root mean square")

Rapporto segnale/rumore

SNR (o S/N): "Signal to Noise Ratio"

$$S/N = \frac{\overline{s^2(t)}}{\overline{n^2(t)}}$$

potenza del segnale

potenza del rumore

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} n^2(t)dt = \int_0^\infty \phi_n(f)df$$

es.: ϕ_n piatto in frequenza

possono avere dipendenza dalla frequenza **radicalmente** diversa
→ la banda in cui si effettua la misurazione ha ruolo cruciale

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} s^2(t)dt = \int_0^\infty \phi_s(f)df$$

es.: ϕ_s singolo tono

S/N: caso del segnale impulsivo

Nel caso di segnali transitori (es. estremo, impulsivi), la media temporale ha poco significato. Si utilizza il *valore massimo* dell'impulso (o segnale transitorio), e ancora il valor medio per il rumore:

$$S/N = \frac{s_M^2}{\overline{n^2(t)}}$$

potenza di picco del segnale

potenza del rumore

Figura di rumore

Ogni sistema (es.: amplificatore) introduce rumore, oltre a quello presente in ingresso.

SNR in ingresso: $S/N|_{in}$

SNR in uscita: $S/N|_{out}$

$\Rightarrow$ "Rumorosità" o figura di rumore o cifra di rumore ("Noise Figure") del sistema:

$$NF = \frac{S/N|_{in}}{S/N|_{out}} \geq 1$$

=1: caso ideale

Si misura in dB: $NF|_{dB} = 10 \log NF$

Rumore termico elettrico (Johnson)

- Causato dall'agitazione (termica) casuale dei portatori di carica.
- Esiste una tensione $V_n(t)$ ai capi di un resistore *a circuito aperto*.
- Esiste una corrente $I_n(t)$ su un resistore *collegato in corto*.

  (valori quadratici medi, sono a media nulla)
- Osservazione sperimentale: Johnson (1928)
- Spiegazione teorica Nyquist (1928)

In una banda Δf, il valore (quadratico medio) della tensione Johnson vale:

$$V_n^2 = 4k_B T R \Delta f$$

R: resistenza del resistore
T: temperatura assoluta
k_B=1.38·10^{-23} J/K, costante di Boltzmann

→ densità spettrale di potenza:

- del rumore di *tensione* Johnson (V_n^2, resistore a circ. aperto): $\phi_J = 4k_B TR$
- del rumore di *corrente* Johnson (I_n^2, resistore in corto): $\phi_J = 4k_B T/R$

Densità spettrali (Johnson)

$$V_n^2 = 4k_BTR\Delta f$$

R: resistenza del resistore
T: temperatura assoluta
k_B=1.38·10^{-23} J/K, costante di Boltzmann

→ densità spettrale di potenza:

- del rumore di *tensione* Johnson (V_n^2, resistore a circ. aperto): $\phi_J = 4k_BTR$
- del rumore di *corrente* Johnson (I_n^2, resistore in corto): $\phi_J = 4k_BT/R$

→ densità spettrale di ampiezza:

- del rumore di *tensione* Johnson: $\sqrt{\frac{V_n^2}{\Delta f}} = \sqrt{4Rk_BT}$ Unità: V/√Hz
- del rumore di *corrente* Johnson: $\sqrt{\frac{I_n^2}{\Delta f}} = \sqrt{\frac{4k_BT}{R}}$ Unità: A/√Hz

Riduzione del rumore termico

- Causato dall'agitazione (termica) casuale dei portatori di carica.

→ l'unico modo per ridurre il rumore Johnson è
abbassare la temperatura operativa

In una banda Δf, il valore (quadratico medio) della tensione Johnson vale:

$$V_n^2 = 4k_BTR\Delta f$$

R: resistenza del resistore
T: temperatura assoluta
k_B=1.38·10^{-23} J/K, costante di Boltzmann

→ per ridurre l'*influenza* del rumore Johnson è necessario
ridurre la banda del sistema di misura

Rumore termico: potenza disponibile

Richiamo: un generatore di tensione V di resistenza interna R può trasferire al massimo la potenza P_{disp} a un carico se esso è adattato, $R_L = R$, e si ha $P_{disp} = V^2/4R$

Johnson: $$V_n^2 = 4k_BTR\Delta f$$

→ potenza di rumore massima ("disponibile") erogabile da un resistore (per una banda Δf):

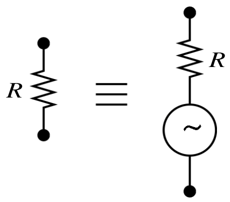
$$P_{n,disp} = \frac{V_n^2}{4R} = k_BT\Delta f$$ indipendente da R.

Esempio: T ambiente (300 K), Δf = 10 Hz, $P_{n,disp} \simeq 4.14 \cdot 10^{-20}$ W

Rumore termico: circuito equivalente

Tensione

reale



resistore privo di rumore

$$V_n^2 = 4k_B T R \Delta f$$

Corrente

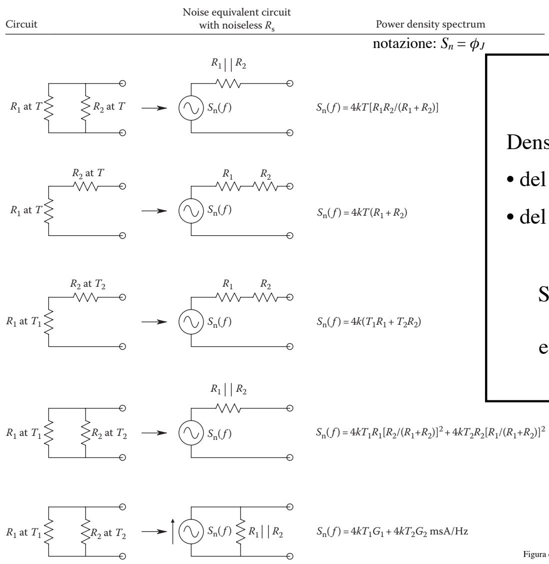
reale

resistore privo di rumore

$$I_n^2 = \frac{4k_B T \Delta f}{R}$$

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Rumore termico: circuiti equivalenti



$$V_n^2 = 4k_B T R \Delta f$$

Densità spettrale di potenza:

- del rumore di *tensione*: $\phi_J = 4k_BTR$
- del rumore di *corrente*: $\phi_J = 4k_BT/R$

Si sommano i valori quadratici medi, perché trattandosi di effetto casuale i vari contributi sono scorrelati

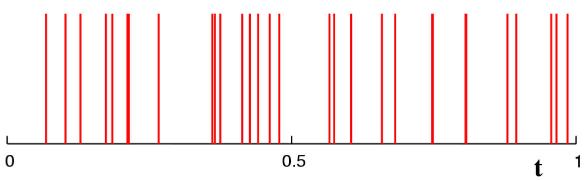
Figura da R.B. Northrop, Introduction to Instrumentation and Measurements, CRC Press

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Rumore shot ("shot noise") o granulare

- Causato dalla fluttuazione casuale dei portatori quantizzati di carica (elettroni) attraverso barriere di potenziale.
  $\rightarrow$ diodi, e in generale tutti i dispositivi a semiconduttore
- Si manifesta quando scorre corrente
- Schottky (1918)

Successione di eventi discreti (statistica di Poisson) corrispondenti al passaggio di una carica ($e = 1.6 \cdot 10^{-19}$C)

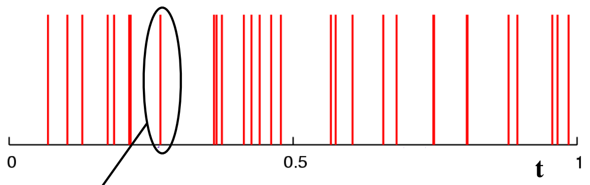


Densità di potenza spettrale

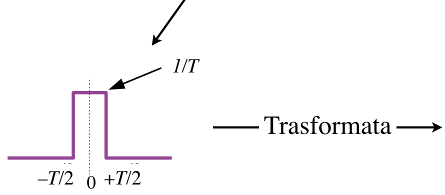
di corrente: $\phi_{S,I}(f) = 2Ie$

di tensione su un resistore R: $\phi_S(f) = 2IeR^2$

Rumore shot: caso degli impulsi



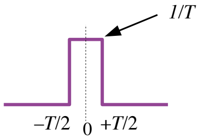
$$\phi_{S,I}(f) = 2Ie$$



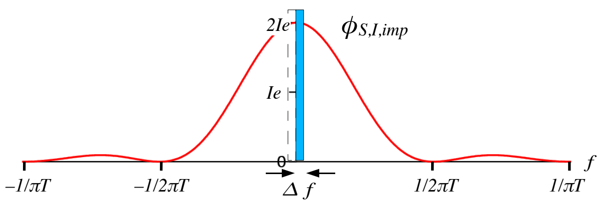
$$\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Densità spettrale di potenza (come un filtro): $2Ie\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right]^2$

Rumore shot: caso degli impulsi



Densità spettrale di potenza: $\phi_{S,I,imp} = 2Ie\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right]^2$



costante (al 10%)
in ± $\frac{1}{5.5T}$

Rumore in eccesso, $1/f$, "flicker"

- Non ha causa nota
- Si manifesta in una grande varietà di fenomeni naturali
- Particolarmente rilevante in semiconduttori e mezzi conduttivi

Densità di potenza spettrale di corrente: $\phi_{I,flick}(f) = \frac{C_m}{f^a}$

C_m: costante caratteristica del materiale

$\alpha = 0.8 \div 1.2$ (approssimativamente)

Contributo grande a basse frequenze!

("in eccesso" rispetto al rumore termico)

Johnson vs. $1/f$: densità spettrale di ampiezza

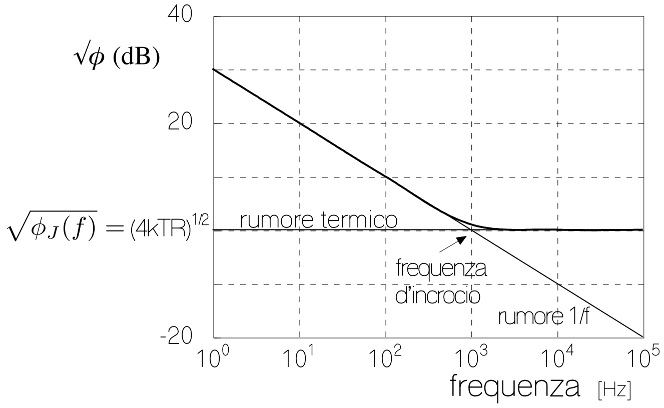


Figura da G.V. Pallottino, op. cit.

$$\sqrt{\phi} = \sqrt{\phi_J}\left[1 + \frac{f_0}{f}\right]$$

N.B. il rumore negli amplificatori
e transistor ha andamento simile,
con $f_0 = 1 \div 10^6$ Hz

Johnson vs. $1/f$ nel dominio del tempo

Rumore bianco

Rumore rosa ($1/f$)

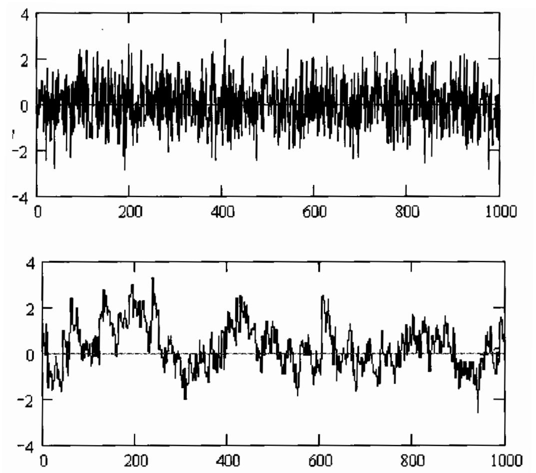


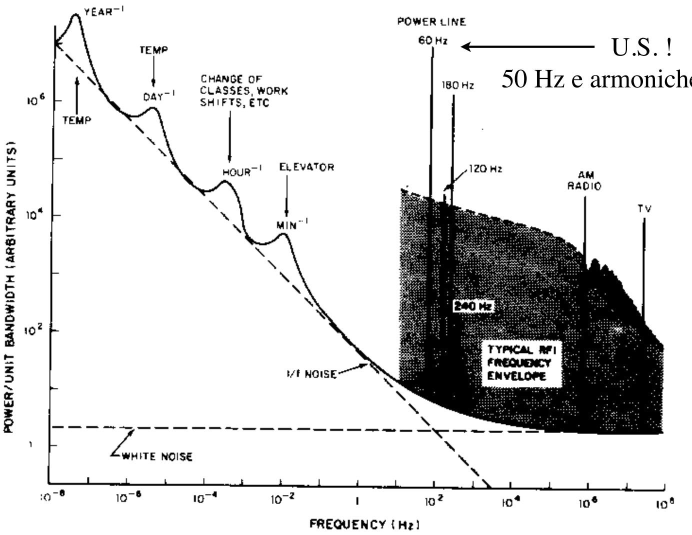
Figura da G.V. Pallottino, op. cit.

Disturbi/interferenze

Cause *esterne*, non *inerenti*.

- 50 Hz (e armoniche superiori), dalla rete elettrica
- Radio (~100 MHz per FM)
- Cellulari/bluetooth/WiFi (2.4 GHz, 5 GHz,..)
- Illuminazione (neon, lampade a vapori)
- Sistemi di accensione (automobili, motori)
- Vibrazioni (basse frequenze, ≲ 30 Hz)
- Scariche elettriche

Disturbi/interferenze



U.S. !

50 Hz e armoniche in E.U.

Figure 6: The Spectrum of Common Environmental Noise (From Vol. 1 - Handbook of Measurement Science, P. Sydenham, ed., John Wiley and Sons, 1982.)

Riduzione del rumore

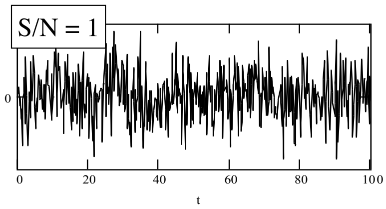
- Filtraggio
- Modulazione
- Ampificazione differenziale
- Media

Filtraggio

Riduzione della banda

Rumore bianco (Johnson, scariche elettriche) $\overline{n_n^2} = C\Delta f$

Riduzione della banda → riduzione proporzionale del contributo di rumore



passa basso ⇒

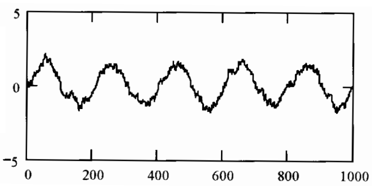


Figura adattata da G.V. Pallottino, op. cit.

Il filtraggio non è efficace quando il rumore è nella medesima banda del segnale.

Esempio. Per segnali DC (o a frequenze molto basse) il filtraggio non è efficace: il rumore $1/f$ ha densità spettrale grande proprio a basse frequenze.

→ modulazione

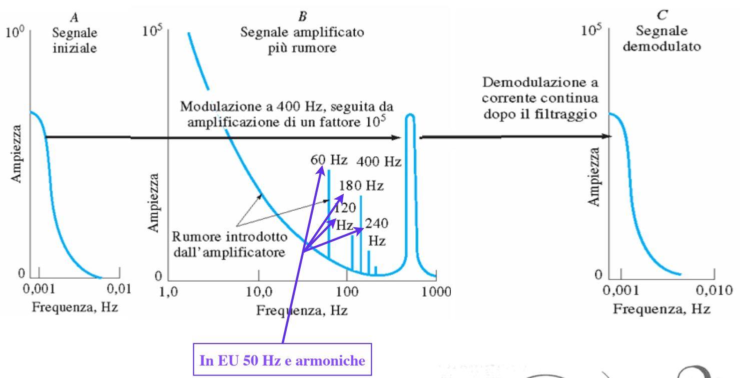
Modulazione

Trasporto del segnale a frequenze maggiori
(e lontane da 50 Hz e armoniche)

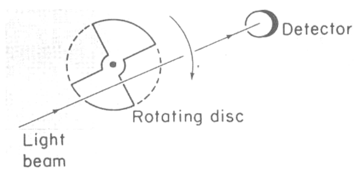
→ a frequenze più alte è possibile
– utilizzare passabanda molto stretti
– mediare (vedi)
per ridurre il rumore bianco

+ possibilità di amplificazione AC

Modulazione



Un segnale DC può essere
modulato anche meccanicamente
(utile per segnali ottici):

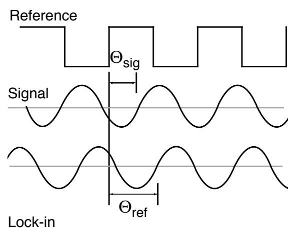


Lock-in (cenno)

Misura a aggancio di fase

$V_{sig}\sin(\omega_r t + \theta_{sig})$

$V_L\sin(\omega_L t + \theta_{ref})$



il lock-in moltiplica il segnale (amplificato) per il riferimento (alla stessa frequenza;
solitamente è lo stesso riferimento che dà il trigger al sistema esterno):

$V_{psd} = V_{sig}V_L\sin(\omega_r t + \theta_{sig})\sin(\omega_L t + \theta_{ref}) =$

$= \underbrace{1/2 V_{sig}V_L\cos([\omega_r - \omega_L]t + \theta_{sig} - \theta_{ref})}_{\text{Se stessa frequenza: DC!}} - \underbrace{1/2 V_{sig}V_L\cos([\omega_r + \omega_L]t + \theta_{sig} + \theta_{ref})}_{\text{Frequenza alta (doppia): filtraggio!}}$

Media su un insieme

Necessari numerosi campioni *identici* del medesimo segnale: mediando, il rumore casuale (che è a media nulla) tende a dare contributo zero.
Se il campione è periodico, è necessario conoscere esattamente il periodo per ottenere M campioni identici.

Efficace anche con S/N < 1

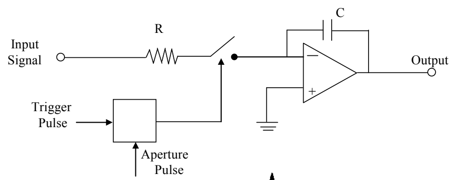
Mediando M campioni, il rapporto S/N diviene

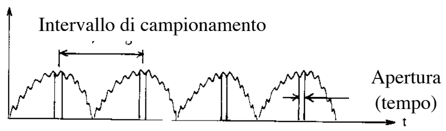
$$\left.\frac{S}{N}\right|_{M} = \sqrt{M}\ \left.\frac{S}{N}\right|_{1campione}$$

Media su un insieme: il boxcar

Boxcar: amplificatore + switch per il campionamento ripetitivo:

Figure adattate dalle Lezioni dal corso ME365, Purdue University, op. cit.



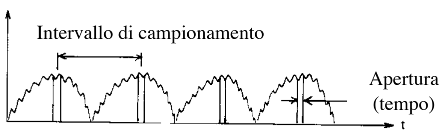


Segnale <u>*periodico*</u>: *s(t+mT) = s(t)*
(se no, può essere modulato prima).
Il metodo è efficace se il rumore *n(t)* è
(i) casuale o (ii) non dello stesso periodo di *s(t)*.

Media su un insieme: il boxcar

Boxcar: amplificatore + switch per il campionamento ripetitivo:

Figure adattate dalle Lezioni dal corso ME365, Purdue University, op. cit.



$s(t+mT)+n(t+mT) \equiv s(t) + n_m$

ogni n_m è differente,
ogni s_m è identico

Media (sull'insieme di campioni):

$$< s(t) >= s(t) + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} n_m = s(t) + \overline{n}$$

Rumore a media nulla? ⇒ $<s>$ → $s(t)$, con rapidità $1/\sqrt{N}$ perché $\sigma_{\overline{n}}^2 = \dfrac{\sigma_n^2}{N}$

Rapporto S/N: $$S/N|_{out} = \frac{\overline{s^2(t)}}{\sigma_{\overline{n}}^2} = N\frac{\overline{s^2(t)}}{\sigma_n^2} = N\ S/N|_{in}$$

... deve poi esserci uno shift della finestra temporale per campionare a $t+\delta t$ etc.

Media temporale

Utile per rimuovere il rumore ad alta frequenza

$$x_{medio}(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t-T/2} x(t)dt$$

(p.es. con un integratore a doppia rampa, v. voltmetri digitali)

È efficace con qualunque rumore o disturbo con componenti spettrali a frequenze [molto] maggiori rispetto alle frequenze del segnale (anche per disturbi della rete, 50 Hz, se il segnale è a frequenze sensibilmente inferiori)

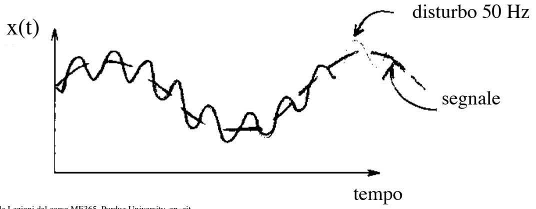


Figura adattata dalle Lezioni dal corso ME365, Purdue University, op. cit.

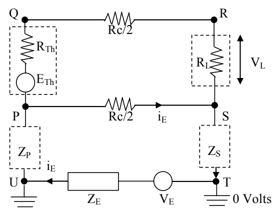
Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Amplificazione differenziale (cenno)

Utile per rimuovere i loop di massa

Figura adattata dalle Lezioni dal corso ME365, Purdue University, op. cit.

trasduttore

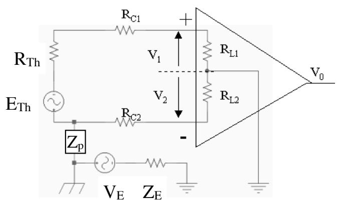


strumento

Masse *differenti*

V_E: diverse origini
(tensioni indotte ad es.)

Amplificazione differenziale



N.B.: V_E e Z_E sbilanciano comunque il circuito