Elementi di Misure Elettroniche
E. Silva - a.a. 2016/2017
Parte 2.1

Proprietà degli strumenti di misura.
Strumenti analogici e numerici.
Strumenti di primo e secondo ordine.
Amperometro, voltmetro, wattmetro analogici. Ohmmetro.
Misure di resistenza: metodo voltamperometrico, metodi a ponte.

v. 1.1

Riferimenti:

R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer
Cap. 4

R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press
Parr. 8.2.1,

P. Fornasini "The Uncertainty in Physical Measurements", Springer
Cap. 3

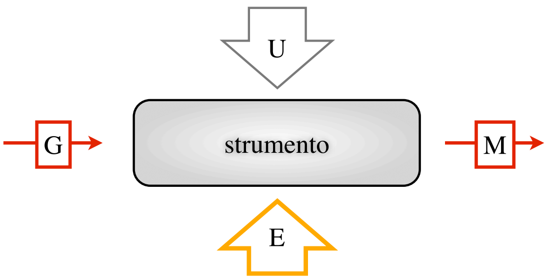
Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Strumenti di misura

- trasformano la quantità da misurare in un'altra, più facilmente misurabile (es.: posizione di un indice su una scala graduata, un numero su un display, una certa quantità di tacche su un display...)
- necessitano pertanto di *calibrazione*
- sono caratterizzati da numerose proprietà, fra cui:
  - sensibilità
  - risoluzione
  - accuratezza
  - precisione
  - linearità
  - portata
  - prontezza
  - condizioni operative

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Strumenti di misura: schema



G: grandezza in ingresso
M: grandezza in uscita
U: unità standard
E: energia

Lo strumento effettua un confronto fra la grandezza G con l'unità standard U. Il risultato della misurazione, ovvero la misura Γ, viene trasformato in un'uscita M facilmente leggibile.
Il tutto richiede energia in ingresso, E.
La catena di operazioni si avvale di *sensori, trasduttori*, *amplificatori*, etc.

Generalità per strumenti DC

Grandezza di interesse		***Strumento***
• ddp (ad es., nei nodi)	→	*voltmetri*
• correnti	→	*amperometri*
• resistenze	→	*ohmmetri*

Multimetri: uniscono la capacità di misurare differenti grandezze

Analogici vs. Digitali (numerici)

scala graduata — display

Strumenti analogici

• Lettura della misurazione su un indice che si può muovere con continuità su una scala graduata (trasformazione del segnale i ingresso in in segnale analogico).
• se *elettromeccanici*:
– Caratteristiche determinate [anche] dal *moto* dell'*equipaggio mobile*.
– Assorbono [parte o tutta] l'energia necessaria al funzionamento dal circuito sotto esame (strumenti passivi)

Strumenti digitali (numerici)

• Lettura della misurazione su un display o codifica numerica (trasformazione del segnale in ingresso in un numero, leggibile direttamente su un display e/o adatto come input per un computer).
• traggono [gran parte del]l'energia necessaria al funzionamento da una sorgente esterna al circuito sotto indagine (batteria interna, alimentazione di rete).

Sensibilità

G: grandezza in ingresso (*misurando*)
R: risposta dello strumento
(es.: deviazione di un ago su un indice graduato)

Sensibilità: $$S = \frac{dR}{dG}$$

S non è in necessariamente costante con *G*.

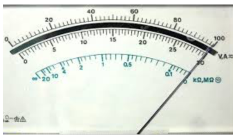
È un parametro relativo all'*ingresso*

Risoluzione

G: grandezza in ingresso (*misurando*)
R: risposta dello strumento
(es.: deviazione di un ago su un indice graduato)

La *risoluzione* è la più piccola variazione ΔG che può essere misurata.
Corrisponde alla più piccola variazione ΔR che può essere rivelata.

È un parametro relativo all'*uscita*



Su uno strumento analogico (v. oltre) corrisponde alla frazione *ragionevolmente apprezzabile* della distanza fra due tacche.

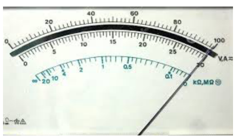
Su uno strumento numerico (v. oltre) corrisponde al valore del digit meno significativo (LSD).

Risoluzione e Sensibilità

Sono grandezze correlate.

negli strumenti analogici, la sensibilità è talvolta data come inverso della risoluzione, $1/\Delta G$

aumentare la risoluzione di uno strumento numerico → aumentare la sensibilità



Campo di misura (portata)

Intervallo dei valori del misurando per il quale lo strumento è in grado di effettuare la misurazione.

Il massimo valore è detto *fondo scala*.
Il minimo valore è detto *soglia*.

L'intero intervallo di valori che può essere rappresentato dallo strumento di misura è detto *dinamica*.

La dinamica è la differenza tra la portata e la sensibilità (intesa come ampiezza minima dell'ingresso)

Accuratezza, precisione, classe

L'***accuratezza*** di uno strumento indica la sua capacità di fornire, per il misurando, un valore il più prossimo possibile al "valore atteso".

La ***precisione*** di uno strumento indica la sua capacità di riprodurre il medesimo risultato nelle medesime condizioni. Il termine è sovente (e più spesso recentemente) sostituito da "***riproducibilità***" o "***ripetibilità***".

Classe: ampiezza della fascia di incertezza, espressa in percentuale del fondo scala, valida in ogni punto della scala stessa. In genere viene fornito il massimo scostamento fra valore misurato e valore atteso.
Esempio: uno strumento in classe 0.2 ha accuratezza tale da definire un intervallo ±0.2% attorno al valore atteso *quando misurato al fondo scala*.

Classe di precisione

Classe: ampiezza della fascia di incertezza, espressa in percentuale del fondo scala, valida in ogni punto della scala stessa. In genere viene fornito il massimo scostamento fra valore misurato e valore atteso.
Esempio: uno strumento in classe 0.2 ha accuratezza tale da definire un intervallo ±0.2% attorno al valore atteso *quando misurato al fondo scala*.

Classi previste dalle norme: 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 3, 5

L'***errore assoluto*** di uno strumento di classe C, portata P, in qualunque punto della scala non deve essere superiore a

$$\epsilon = \frac{C \cdot P}{100}$$

Esempio: un amperometro di classe 0.5 e portata 5 A, in qualunque punto della scala non deve avere un errore assoluto superiore a [0.5·5/100]A = 25 mA

Incertezza (scarto tipo): data la classe di precisione, si assume una distribuzione *rettangolare* delimitata dai limiti di classe, per cui

$$u = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}} = \frac{C \cdot P}{100\sqrt{3}}$$

NOTA: errore assoluto e scarto tipo hanno stessi valori su tutta la scala, e quindi l'errore percentuale è *maggiore* lontano dal fondo scala

Linearità

Si dice *lineare* uno strumento in cui la relazione fra il valore dell'uscita M e dell'ingresso G è una relazione lineare:

$$M = a + c\,G$$

per cui le *variazioni* di M sono proporzionali alle variazioni di G:

$$\Delta M = c\,\Delta G$$

Esempio.
In questo strumento l'uscita è lo spostamento angolare dell'ago.
Quando viene utilizzato come:
Voltmetro o Amperometro → *lineare*.

Ohmmetro → *logaritmico*

Limiti di impiego

Intervallo dei valori delle *grandezze di influenza* entro il quale lo strumento mantiene le sue caratteristiche.

Esempi:
– Temperatura (anche dovuta ad autoriscaldamento)
– Umidità
– Posizione (ad es. inclinazione)
– Campi elettrici e magnetici esterni
– Forma d'onda del segnale in ingresso
– Larghezza di banda del segnale in ingresso
– Valore delle tensioni di alimentazione
– ...

Prontezza

Dà una misura della rapidità con cui lo strumento fornisce il risultato della misurazione.

In assenza di un modello matematico dello strumento, è un concetto qualitativo.

Esempio. La prontezza di un termometro può essere data in termini del suo tempo caratteristico, che diventa un parametro quantitativo essendo noto il modello matematico del termometro (andamento esponenziale alla temepratura del bagno termico con cui è in contatto)

Il *tempo di misura* è il tempo necessario allo strumento per effettuare la misurazione e per fornire all'utente il risultato.

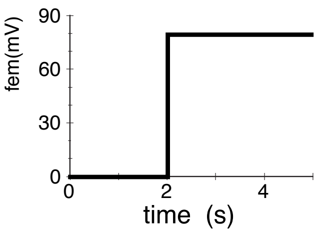
È spesso una caratteristica in contrasto con la *precisione*.

Esempio. Si pensi all'uso di circuiti integratori, o di medie numeriche, per ridurre il rumore

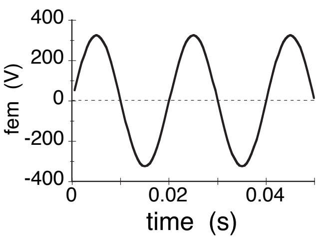
Strumenti di primo e secondo ordine

Comportamento dinamico di uno strumento

G(t): misurando, ingresso



Es. di misurando "DC"!
("attacco i puntali")



Es. di misurando "AC"

M(t): uscita ?

Risposta di ordine zero, uno, due

G(t): ingresso
M(t): uscita

$$M(t) = kG(t)$$

Ordine zero, risposta istantanea. Idealizzazione. Adatto per strumenti con risposta molto veloce rispetto alal variazione di *G*.

$$\beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

Ordine uno, risposta non istantanea. Strumenti di primo ordine

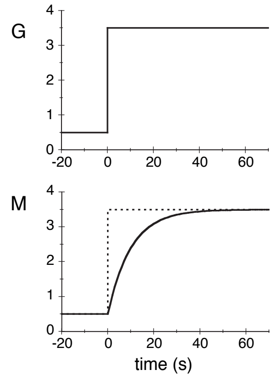
$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2} + \beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

Ordine due, risposta non istantanea. Strumenti di secondo ordine. Oscillazioni.

Risposta di uno strumento di primo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$



Caso "DC", ovvero "accensione" istantanea del misurando (anche questa è un'approssimazione!).

$$M(t) = G + \boxed{\bar{M}e^{-\gamma t}}$$
$$\gamma = C/\beta$$

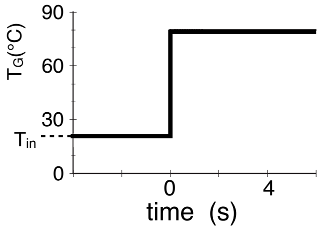
È la soluzione dell'omogenea associata, dipende dallo strumento, non dal misurando

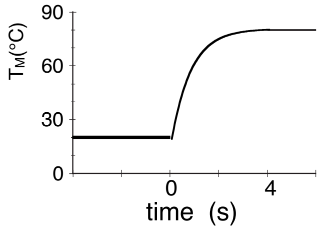
si ottiene imponendo le condizioni al contorno

Risposta di uno strumento di primo ordine

a una sollecitazione a gradino

Esempio: immersione di un termometro in un bagno a T_G=90°C, provenendo dall'ambiente (T_{in}=20°C). La risposta è la temperatura indicata dal termometro, T_M.



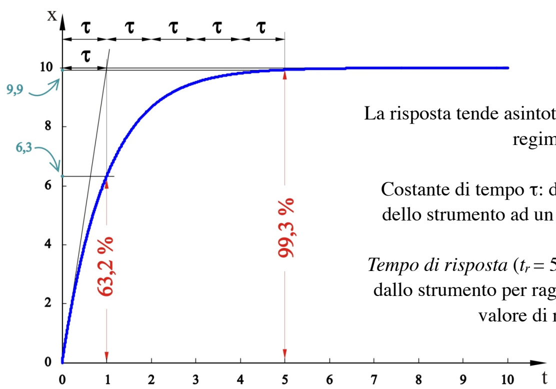


$$\begin{cases} C_V\dfrac{dT_M}{dt} + \kappa[T_M(t) - T_G] = 0 \\ T_M(0) = T_{in} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_M(t) = T_G + [T_{in} - T_G]e^{-t/\tau} \\ \tau = C_V/\kappa \end{cases}$$

Risposta di uno strumento di primo ordine

a una sollecitazione a gradino

Esempio.



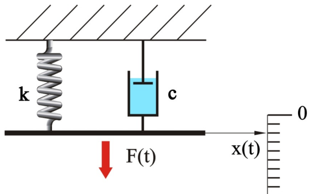
La risposta tende asintoticamente al valore di regime.

Costante di tempo τ: definisce la risposta dello strumento ad un ingresso a gradino

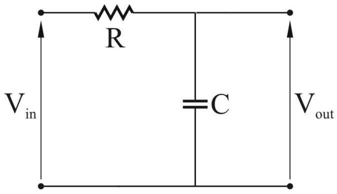
Tempo di risposta (t_r = 5τ): tempo impiegato dallo strumento per raggiungere il 99% del valore di regime

figura: cortesia di A. Scorza

Strumenti/sistemi di primo ordine



$$F(t) = kx + c\dot{x}$$



$$V_{in}(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = RC\frac{dV_{out}(t)}{dt} + V_{out}(t)$$

figure: cortesia di A. Scorza

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

La maggior parte degli strumenti ad ago sono del secondo ordine

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2} + \beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

soluzione

Funzione di risposta trasformando secondo Laplace.

Risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2} + \beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

Risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine, con

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0, \quad t > 0 \\ &= 0, \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

La soluzione è la somma di:

- una soluzione particolare M_{part}
- la soluzione della omogenea associata: $\alpha\frac{d^2M}{dt^2} + \beta\frac{dM}{dt} + CM(t) = 0$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha \frac{d^2M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

$$G(t) = G_0, \quad t > 0$$
$$= 0, \quad t \leq 0$$

Comportamento asintotico: $t \to \infty$
(a regime tutte le derivate sono nulle)

$$M_\infty = \boxed{\frac{A}{C}} G_0$$

fattore di conversione in regime continuo

Questa è una soluzione particolare (verifica immediata).
Resta da risolvere l'omogenea associata

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha \frac{d^2M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = 0$$

Soluzione dell'omogenea associata:
scrivendo $M_{om}(t) = A_{om}e^{mt}$
si ottiene un'equazione quadratica in m

$$\Rightarrow \quad m_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{C}{\alpha}} = \omega_s[-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}] = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\Delta}$$

dove nelle uguaglianze si sono usate le definizioni:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

pulsazione propria

$$\gamma_{cr} = 2\sqrt{\alpha C}$$

smorzamento critico

$$\gamma = \frac{\beta}{\gamma_{cr}} = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

coefficiente di smorzamento

Discriminante:

$$\Delta = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{C}{\alpha} = \omega_s^2(\gamma^2 - 1) = \omega_0^2$$

pulsazione propria del sistema smorzato:

$$\omega_0 = \omega_s \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha \frac{d^2M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = 0 \qquad M_{om}(t) = A_{om}e^{mt}$$

$$m_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{C}{\alpha}} = \omega_s[-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}] = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\Delta}$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\gamma_{cr}} = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

$$\gamma_{cr} = 2\sqrt{\alpha C}$$

$$\omega_s = \sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

è la pulsazione del sistema non smorzato ($\beta = 0$)

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=0 \qquad M_{om}(t)=A_{om}e^{mt} \qquad \omega_s=\sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

$$m_{1,2}=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{C}{\alpha}}=\omega_s[-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1}]=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\Delta} \qquad \gamma=\frac{\beta}{\gamma_{cr}}=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

$$\gamma_{cr}=2\sqrt{\alpha C}$$

$M_{om}(t)=A_{om}e^{mt}$ $\Rightarrow$ soluzione:

$$M_{om}(t)=A_1e^{m_1t}+A_2e^{m_2t}=e^{-\omega_s\gamma t}\left(A_1e^{+\omega_0t}+A_2e^{-\omega_0t}\right)$$

essendo $e^{\pm\varphi}=\cosh\varphi\pm\sinh\varphi$

$$M_{om}(t)=e^{-\omega_s\gamma t}\left[A'\cosh(\omega_0t)+A''\sinh(\omega_0t)\right]$$

con $A'=\dfrac{A_1+A_2}{2}$ $\qquad A''=\dfrac{A_1-A_2}{2}$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=AG(t) \qquad \begin{aligned}G(t)&=G_0,\quad t>0\\&=0,\quad t\leq 0\end{aligned}$$

Soluzione asintotica (particolare) $\quad M_\infty=\dfrac{A}{C}G_0$

Soluzione dell'omogenea associata:

$$M_{om}(t)=e^{-\omega_s\gamma t}\left[A'\cosh(\omega_0t)+A''\sinh(\omega_0t)\right]$$

Integrale generale: $\quad M(t)=M_\infty+M_{om}(t)$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0+e^{-\omega_s\gamma t}\left[A'\cosh(\omega_0t)+A''\sinh(\omega_0t)\right]$$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\boxed{\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=AG(t) \qquad \begin{aligned}G(t)&=G_0,\quad t>0\\&=0,\quad t\leq 0\end{aligned}}$$

Integrale generale: $\quad M(t)=M_\infty+M_{om}(t)$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0+e^{-\omega_s\gamma t}\left[A'\cosh(\omega_0t)+A''\sinh(\omega_0t)\right]$$

A', A'' dalle condizioni iniziali: $\quad M(0)=0\Rightarrow A'=-\dfrac{A}{C}G_0$

$$M'(0)=0\Rightarrow A''=-\frac{A}{C}G_0\frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma$$

$$\boxed{M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(\cosh(\omega_0t)+\frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma\sinh(\omega_0t)\right)\right]}$$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=AG(t)$$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(\cosh(\omega_0 t)+\frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma\sinh(\omega_0 t)\right)\right]$$

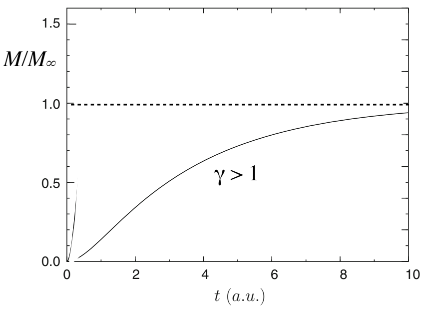
$$m_{1,2}=\omega_s[-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1}]$$

$$\omega_s=\sqrt{\frac{C}{\alpha}}\qquad \gamma_{cr}=2\sqrt{\alpha C}$$

$$\gamma=\frac{\beta}{\gamma_{cr}}=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

$$\omega_0=\omega_s\sqrt{\gamma^2-1}$$

Sovrasmorzamento: $\gamma > 1$



- $m_{1,2}$ reali (negative) e distinte
- $M(t)$ è *approssimativamente* esponenziale
- γ determina il tempo con cui $M \to {}^{A}/_{C}\, G_0$ (tempo necessario a raggiungere l'equilibrio)

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=AG(t)$$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(\cosh(\omega_0 t)+\frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma\sinh(\omega_0 t)\right)\right]$$

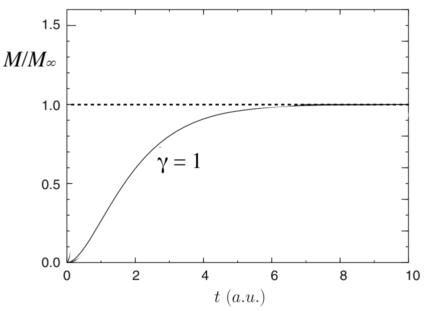
$$m_{1,2}=\omega_s[-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1}]$$

$$\omega_s=\sqrt{\frac{C}{\alpha}}\qquad \gamma_{cr}=2\sqrt{\alpha C}$$

$$\gamma=\frac{\beta}{\gamma_{cr}}=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

$$\omega_0=\omega_s\sqrt{\gamma^2-1}$$

Smorzamento critico: $\gamma = 1$



$$M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(1+\omega_s t\right)\right]$$

- $m_{1,2}$ reali (negative) e coincidenti
- M raggiunge l'equilibrio nel minor tempo possibile
- ω_s ~ prontezza

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha\frac{d^2M}{dt^2}+\beta\frac{dM}{dt}+CM(t)=AG(t)$$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(\cosh(\omega_0 t)+\frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma\sinh(\omega_0 t)\right)\right]$$

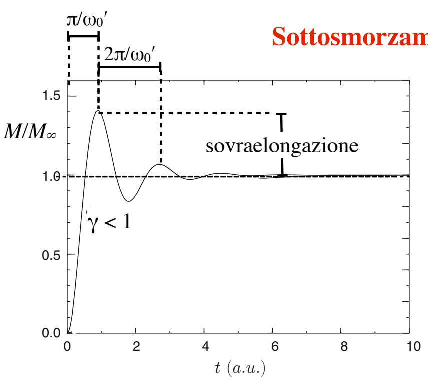
$$m_{1,2}=\omega_s[-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1}]$$

$$\omega_s=\sqrt{\frac{C}{\alpha}}\qquad \gamma_{cr}=2\sqrt{\alpha C}$$

$$\gamma=\frac{\beta}{\gamma_{cr}}=\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha C}}$$

$$\omega_0=\omega_s\sqrt{\gamma^2-1}$$

Sottosmorzamento: $\gamma < 1$



- $m_{1,2}$ immaginarie e distinte
- $\omega_0 \to i\omega_0'$ $\qquad \omega_0'=\omega_s\sqrt{1-\gamma^2}$

$$M(t)=\frac{A}{C}G_0\left[1-e^{-\omega_s\gamma t}\left(\cos(\omega_0' t)+\frac{\omega_s}{\omega_0'}\gamma\sin(\omega_0' t)\right)\right]$$

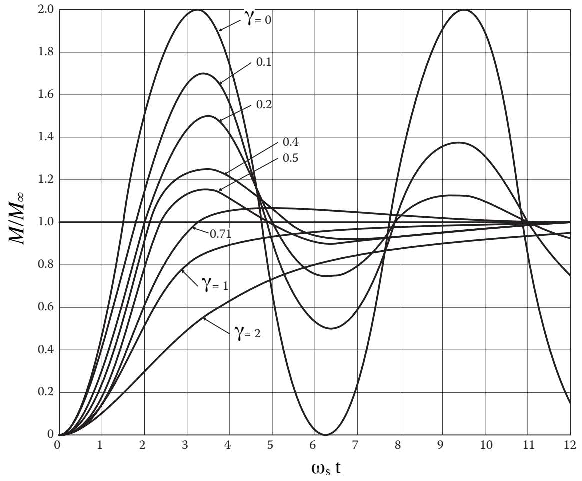
oscillazioni smorzate

- sovraelongazione:

$$M_0(\pi/\omega_0')=M_\infty\left(1+e^{-\pi\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}}\right)$$

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino



Uno strumento per risposte a un segnale a gradino (DC) sarà progettato *poco* sottosmorzato, $1 \geq \gamma > 0.7$

- tempi rapidi di raggiungimento dell'equilibrio
- modesta sovraelongazione
- percezione visiva dell'avvicinamento all'equilibrio
- ridotto effetto degli attriti rispetto al sovrasmorzamento

Figura adattata da R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press

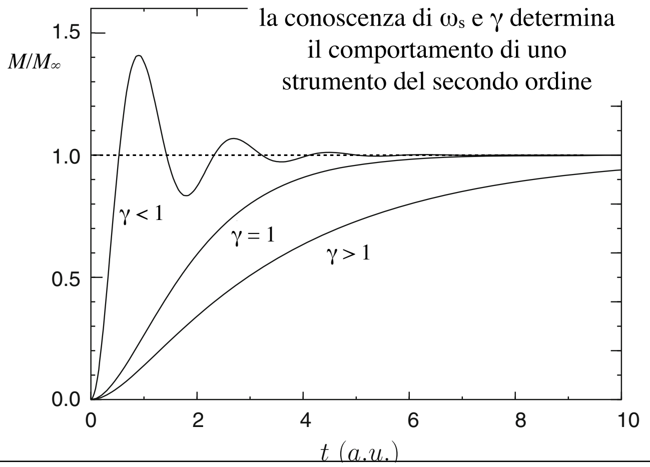
Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino

$$\alpha \frac{d^2M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

$$M(t) = \frac{A}{C} G_0 \left[1 - e^{-\omega_s \gamma t}\left(\cosh(\omega_0 t) + \frac{\omega_s}{\omega_0}\gamma \sinh(\omega_0 t)\right)\right]$$

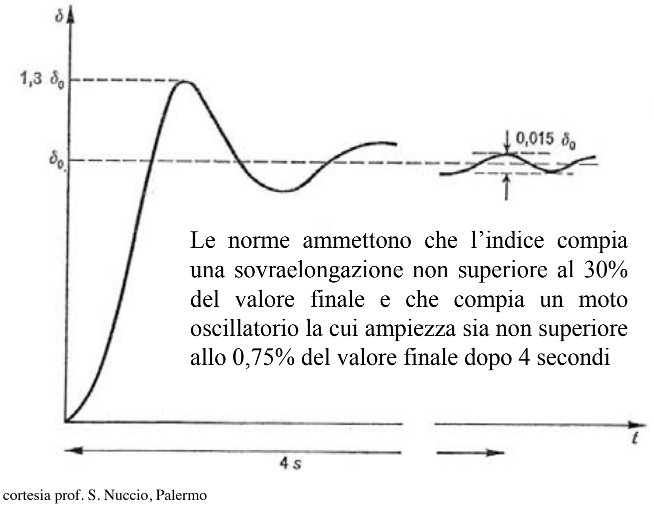
$$\omega_0 = \omega_s \sqrt{\gamma^2 - 1}$$



la conoscenza di ω_s e γ determina il comportamento di uno strumento del secondo ordine

Risposta di uno strumento di secondo ordine

a una sollecitazione a gradino



Le norme ammettono che l'indice compia una sovraelongazione non superiore al 30% del valore finale e che compia un moto oscillatorio la cui ampiezza sia non superiore allo 0,75% del valore finale dopo 4 secondi

Figura cortesia prof. S. Nuccio, Palermo

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

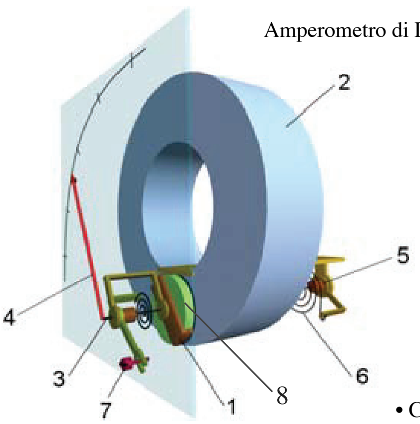


Figura da S. Tumanski, *Principles of Electrical Measurements*, Taylor and Francis

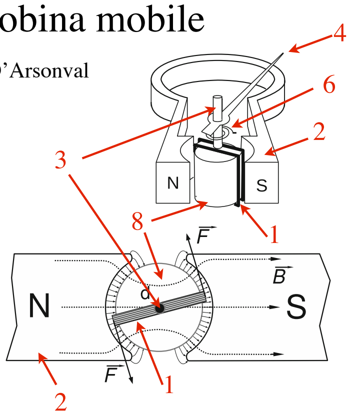


Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

1– bobina mobile
2– magnete permanente
3– asse di rotazione
4– ago indicatore
5– cuscinetti
6– molla
7– correzione di zero
8– nucleo di ferro dolce

- Campo **B** radiale nella gap di aria, |**B**|= cost.
- Bobina di n avvolgimenti e area S.
- la molla mantiene il sistema in equilibrio.
- Scorre I nella bobina → coppia meccanica
- la deflessione θ misura I.

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

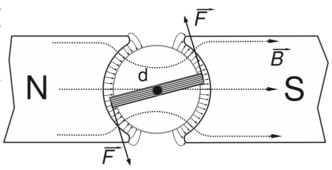


Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

- Campo **B** radiale nella gap di aria, |**B**|= cost.
- Bobina di n avvolgimenti e area S=hd.
- la molla mantiene il sistema in equilibrio.
- Scorre I nella bobina → coppia meccanica
- la deflessione θ misura I.

Scorre I, allora la coppia meccanica vale $\mathcal{M} = nISB = \Phi^* I$
con $\Phi^* = n\,S\,B$
(***B*** radiale: ***F*** sul lato di una spira perpendicolare al foglio vale $\boldsymbol{F} = I\,\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{B} = I\,h\,B$, non dipende da θ)

La coppia meccanica determina una deflessione θ, la molla esercita una coppia di richiamo $-C\theta$.
All'equilibrio, $\mathcal{M} - C\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = [\Phi^*/C]\, I$

Lo spostamento angolare (dopo una opportuna calibrazione) è una misura della corrente che fluisce nell'amperometro.
È uno strumento *lineare*.

Sensibilità: $$S_{amp} = \frac{\partial \theta}{\partial I} = \frac{\Phi^*}{C}$$

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

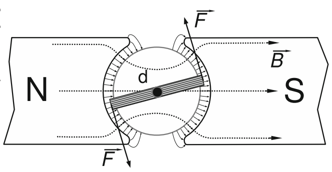


Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

Comportamento dinamico

$$\mathcal{M} = nISB = \Phi^* I$$

coppia di richiamo: $-C\theta$

coppia di smorzamento viscoso: $-\beta\dot{\theta}$

dovuta alle correnti parassite date dalla fem indotta: il flusso attraverso la bobina è (il campo è radiale solo nella gap) $\phi = \Phi^*\theta$, e quindi $f = -\frac{d\phi}{dt} = -\Phi^*\dot{\theta}$
La corrente diventa (R: resistenza del circuito in cui è inserito l'amperometro) $I - f/R$

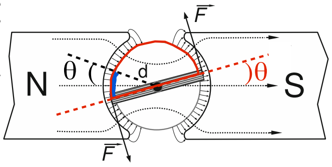
per cui la coppia $$\mathcal{M} = \Phi^*\left(I - \frac{f}{R}\right) = \Phi^* I - \frac{{\Phi^*}^2\dot{\theta}}{R}$$

NOTA: la coppia di smorzamento viscoso ***dipende dal circuito in esame***, e quindi il medesimo strumento potrà cambiare smorzamento a seconda del circuito (v. oltre), anche a parità di range

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer



Dimostrazione di $\phi = \Phi^* \theta$

ϕ : flusso concatenato alla bobina

ϕ_1 : flusso concatenato a una spira

$\phi = n\, \phi_1$

$\Phi^* = hd\, B$

Teorema di Gauss per $\boldsymbol{B}$. $\Phi(\boldsymbol{B}) = 0$. Si prenda la superficie con pareti date da una spira, dal semicilindro di raggio $r=d/2$ e altezza h, e dalle due basi semicilindriche (vista in sezione, contorno in rosso). Pertanto $\phi_1 = \phi_{emicilindro}$

Il flusso attraverso la parete emicilindrica $\phi_{emicilindro}$ è dato dal solo flusso attraverso la parte in **blu** della parete emicilindrica, di ampiezza 2θ: attraverso la restante parte della parete vi sono contributi eguali in modulo ma opposti in segno.

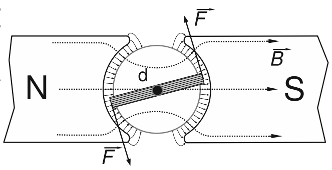
Poiché il campo $\boldsymbol{B}$ è radiale, $\phi_{emicilindro}$ = **sup. emicilindro** $\cdot\, B = h\, 2\, r\theta\, B$.

Quindi $\phi_1 = h\, 2\, r\theta\, B$ da cui $\phi = \Phi^* \theta$

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer



Comportamento dinamico

$\mathcal{M} = nISB = \Phi^* I$

coppia di richiamo: $-C\theta$

coppia di smorzamento viscoso: $-\beta\dot{\theta}$

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + C\theta = \Phi^* I$$

momento di inerzia della bobina mobile

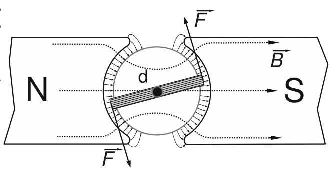
Strumento del secondo ordine:

$$\alpha \frac{d^2 M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

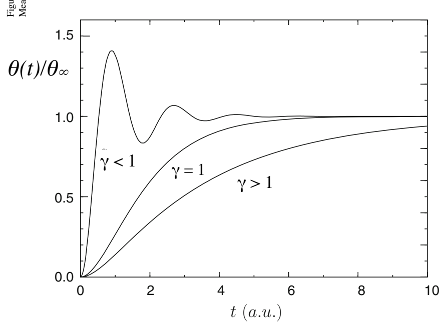


Comportamento dinamico

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + C\theta = \Phi^* I$$

Strumento del secondo ordine:

$$\alpha \frac{d^2 M}{dt^2} + \beta \frac{dM}{dt} + CM(t) = AG(t)$$



$$\theta_\infty = \frac{\Phi^*}{C} I \qquad \gamma = \frac{\beta}{2\sqrt{\mathcal{I}C}} \qquad \omega_s = \sqrt{\frac{C}{\mathcal{I}}}$$

γ compete con sensibilità: $S_{amp} = \dfrac{\Phi^*}{C}$

C piccolo
– alta sensibilità
– grande smorzamento!
– piccola prontezza!

bobina: di piccolo momento di inerzia

Amperometro a bobina mobile

Amperometro di D'Arsonval

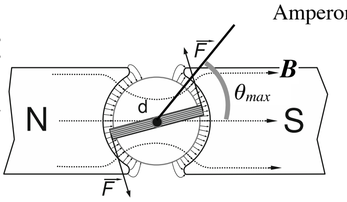


Figure da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

caratteristiche

1. la sollecitazione è data dalla corrente che circola nelle spire della bobina.
2. la risposta è data da $\theta \propto I$.
3. la sensibilità è *costante*: $S_{amp} = \frac{\partial\theta}{\partial I} = \frac{\Phi^*}{C}$
4. la portata è data da $I_{max} = \theta_{max} / S$, oltre tale deflessione la risposta non è più quella prevista e lo strumento può danneggiarsi. La grandezza I_{max}^{-1} è spesso chiamata *sensibilità dell'amperometro* (impropriamente). Valori tipici: 20 kΩ/V, ovvero I_{max} = 50 μA.
5. L'incertezza dovuta alla sensibilità è costante, quindi l'incertezza percentuale è minima vicino al fondoscala.
6. Aumentare il numero di spire nella bobina aumenta la sensibilità S (aumenta Φ^*), ma aumenta anche la *resistenza interna* dell'amperometro.
7. L'equilibrio si raggiunge in un tempo ~ 1÷2 s ("lento")
8. la corrente può scorrere in un solo verso!

Amperometro

• lettura diretta dell'intensità di corrente *che fluisce attraverso di esso*.
⇒ va inserito nel ramo ove si intende misurare la corrente

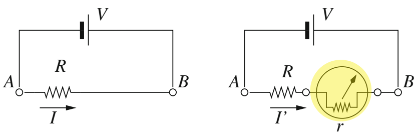
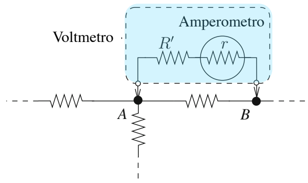


Figure adattate da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

• Un amperometro dotato di opportuna resistenza in serie ("grande") opportunamente calibrato diviene un misuratore di ddp: un Voltmetro!

$$V_A - V_B = (r+R')\, I_A = r_V\, I_A$$



Voltmetro

• lettura diretta della ddp *ai suoi capi*.
⇒ va inserito in parallelo al bipolo / fra i punti ove si intende misurare la ddp

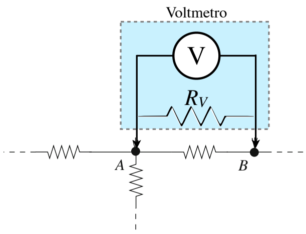
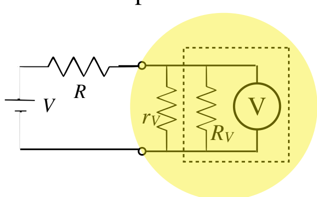


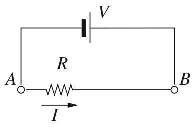
Figure adattate da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

• Un voltmetro dotato di opportuna resistenza in parallelo ("piccola") opportunamente calibrato diviene un misuratore di corrente: un Amperometro!



Amperometro

- lettura diretta dell'intensità di corrente *che fluisce attraverso di esso*.
  $\Rightarrow$ va inserito nel ramo ove si intende misurare la corrente



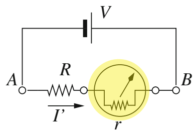


Figure adattate da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

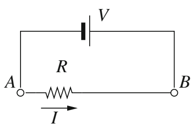
- $\Rightarrow$ perturba *necessariamente* il misurando (la corrente), modificando il circuito con la sua *resistenza interna r* finita ("errore di inserzione"):

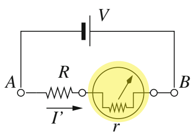
$$I = \frac{V}{R} \longrightarrow I' = \frac{V}{R+r} = \frac{V}{R}\boxed{\frac{1}{1+r/R}}$$

effetto sistematico

dipendente dal circuito sotto indagine!

Amperometro





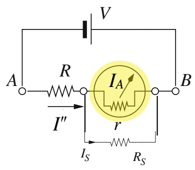
$$I = \frac{V}{R} \longrightarrow I' = \frac{V}{R+r} = \frac{V}{R}\frac{1}{1+r/R}$$

$$I = I'\left(1+\frac{r}{R}\right)$$ richiesta: $r \ll R$

Figure adattate da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

Uso della resistenza di shunt per estendere la portata

$$I'' = I_A + I_S$$
$$rI_A = R_S I_S$$



$$I = \frac{V}{R} \longrightarrow I'' = \frac{V}{R+r||R_S} = \frac{V}{R}\frac{1}{1+(r||R_S)/R}$$

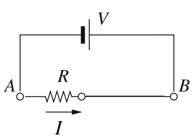
Nota: si evita che in r scorra I_A eccessiva (che può dar luogo ad autoriscaldamento)

$$I_A = \frac{R_S}{R_S+r}I'' = I''\frac{1}{1+r/R_S}$$

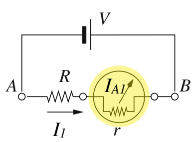
Estendere la portata di un fattore k
$\Rightarrow$ inserire $R_S = r/(k-1)$

Amperometro: riduzione effetti sistematici

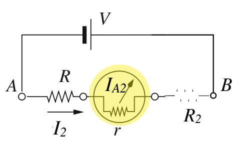
Si vogliono ridurre gli effetti sistematici sulla misura della corrente in un ramo.



$$I = \frac{V}{R}$$



$$I_1 = \frac{V}{r+R} = I\frac{1}{1+r/R}$$



$$I_2 = \frac{V}{r+R_2+R} = I\frac{1}{1+(r+R_2)/R}$$

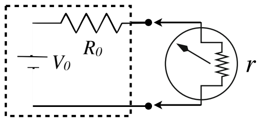
$$R = \frac{I_2(r+R_2) - I_1 r}{I_1 - I_2}$$

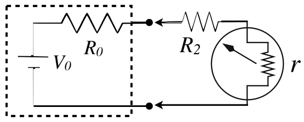
$$I = \frac{I_1 I_2 R_2}{I_2(r+R_2) - I_1 r}$$

Esercizio:
- valutare le incertezze su R e I;
- commentare sul valore opportuno di R_2.
- elaborare una metodologia nel caso r non sia nota.

Amperometro: misura dei parametri di Thévenin

Sia data una rete di cui si vuol conoscere V_0 e R_0 secondo Thévenin (ad esempio, un generatore di tensione reale, dove R_0 è la sua resistenza di uscita)





$$I_1 = \frac{V_0}{r + R_0} \qquad I_2 = \frac{V_0}{r + R_2 + R_0}$$

$$R_0 = \frac{I_2(R_2 + r) - I_1 r}{I_1 - I_2}$$

$$V_0 = \frac{I_2 I_1 R_2}{I_1 - I_2}$$

Esercizio:
• valutare le incertezze su R_0 e V_0;
• commentare sul valore opportuno di R_2.
• proporre una variazione più sicura della metodologia nel caso il rapporto fra R_0 e r non sia noto.

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Voltmetro

• lettura diretta della ddp *ai suoi capi*.
⇒ va inserito in parallelo al bipolo / fra i punti ove si intende misurare la ddp

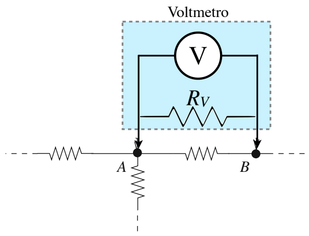
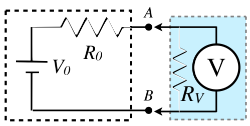


Figura adattata da R. Bartiromo, M. De Vincenzi "Electrical Measurements in the Laboratory Practice", Springer

• ⇒ perturba *necessariamente* il misurando (la ddp), modificando il circuito con la sua *resistenza interna* R_V non infinita ("errore di inserzione"):

Equivalente di Thévenin



$$V_V = I_V R_V = \frac{R_V}{R_0 + R_V} V_0 = V_0 \frac{1}{1 + \boxed{R_0/R_V}}$$

$V_0 = V_V \left(1 + \frac{R}{R_V}\right)$ richiesta: $R_V \gg R$

effetto sistematico

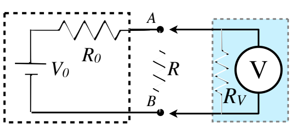
dipendente dal circuito sotto indagine (R_0)!

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Voltmetro

Esempio: lettura di una ddp ai capi di una resistenza R

Equivalente di Thévenin



$$V_V = V_0 \frac{R||R_V}{R_0 + R||R_V} = V_0 \frac{1}{1 + R_0/(R||R_V)}$$

Voltmetro analogico

caratteristiche

1. la sollecitazione è data dalla ddp (che fa circolare una corrente nelle spire della bobina).
2. la risposta è data da $\theta \propto V$.
3. la sensibilità è *costante*:
4. L'incertezza dovuta alla sensibilità è costante, quindi l'incertezza percentuale è minima vicino al fondoscala.
5. L'equilibrio si raggiunge in un tempo ~ 1÷2 s ("lento")
6. La ddp può essere applicata con un solo segno!

"sensibilità"

È detta impropriamente "sensibilità del voltmetro analogico" una grandezza η che fornisce una misura della resistenza interna R_V, come segue: R_V è dato dalla "sensibilità" moltiplicata per il valore di fondo scala in uso. Tale numero può differire per uso in DC e uso in AC.

Esempio. Data una "sensibilità" di 20000 Ω/V, a un fondoscala da 20 V corrisponde R_V = 20000 Ω/V · 20 V = 400 kΩ

La "sensibilità" è data dal rapporto fra la ddp di fondo scala V_{fs} e la potenza assorbita a f.s., P_{fs}:

$$\eta = \frac{V_{fs}}{P_{fs}} = \frac{V_{fs}}{V_{fs}^2/R_V} = \frac{1}{I_{fs}}$$

dove I_{fs} è la corrente che scorre nel voltmetro a fondo scala.

Voltmetro elettrostatico o elettrometro

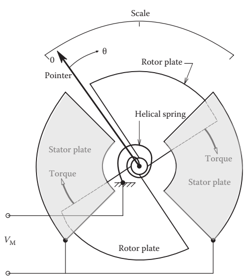


Figura adattata da R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press

Capacità: $C(\theta)$.
Speciale sagomatura dei settori: risposta lineare
→ $C(\theta) = C_0 + K_C\theta$ con $C_0 = C(\theta = 0°)$.
Valore tipico: $C(\theta_{max}) \approx 20 \div 500$ pF
Applicando V_M si ottiene una coppia meccanica $\mathcal{M}$ bilanciata dalla coppia di contrasto data dalla molla di richiamo, $-h\theta$.
ddp costante → energia elettrostatica $E = {}^1/_2 C(\theta) V_M^2$

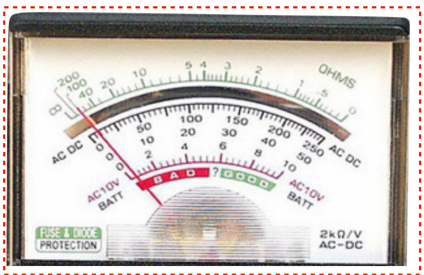
Coppia: $\mathcal{M} = -\left.\frac{\partial E}{\partial \theta}\right|_{V_M = cost} = \frac{1}{2} V_M^2 K_C$

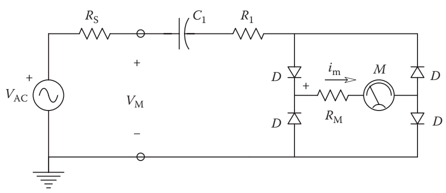
$\Rightarrow \quad \theta = \frac{K_C V_M^2}{2h}$

Strumento *quadratico*
Si può rendere lineare con ulteriore sagomatura

Strumento quasi obsoleto, ma:
- non assorbe corrente in DC
  Ma attenzione ai transitori, in cui il capacitore si comporta come un corto!
  → si utilizza una resistenza serie.
- utilizzato (ancora) per misure di alte tensioni (0.5-200 kV) con correnti basse

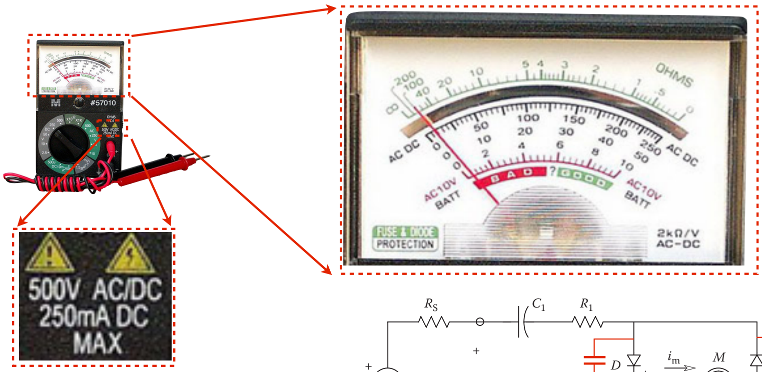
Amperometro di D'Arsonval - AC

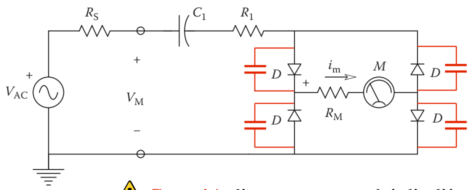




Uso di:
- C_1 di blocco
- R_1 di limitazione in corrente
- ponte rettificatore.

Amperometro di D'Arsonval - AC





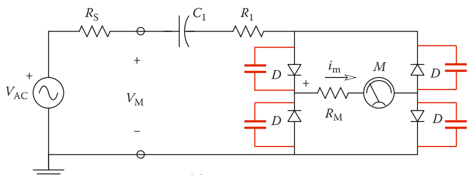
Uso di:
- C_1 di blocco
- R_1 di limitazione in corrente
- ponte rettificatore.

⚠ Capacità di svuotamento dei diodi!
→ limitazione in frequenza

Amperometro di D'Arsonval - AC

Uso di un ponte rettificatore.

⚠ Capacità di svuotamento dei diodi!
→ limitazione in frequenza



$V_{AC} = V_0 + V_S(t)$

- Tempi caratteristici: 1÷2 s
→ fenomeni "veloci" vengono mediati: $\overline{i_M} = \overline{i_{M,peak}\sin\omega t} = \frac{2}{\pi} i_{M,peak} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} i_{M,RMS}$

- a fondo scala, con diodi ideali: $\overline{i_{M,fs}} = \frac{2\sqrt{2}\, V_{S,RMS,fs}}{\pi(R_1 + R_M)}$

- Sotto ~10 mV le letture vanno corrette per le resistenze dirette e inverse dei diodi
- La risposta è accurata solo per V_S sinusoidale.
- La "sensibilità" è $2\sqrt{2}/\pi = 0.90$ rispetto a quella dc:

$$\frac{1}{i_{M,RMS}} = \frac{R_1 + R_M}{V_{S,RMS,fs}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{V_{S,RMS,fs}/i_{M,fs}}{V_{S,RMS,fs}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{i_{M,fs}}$$

Strumento elettrodinamico (elettrodinamometro)

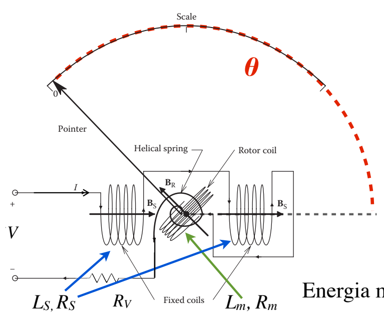


Figura adattata da R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press

L_m, R_m : induttanza e resistenza del rotore
L_S, R_S : induttanza e resistenza dello statore
M: mutua induttanza, dipende da θ
$M(\theta) = K_m \cos\theta$
attorno a $\theta_0 = \pi/2$:
$M \simeq -K_m(\theta - \theta_0)$

Agisce in base alle azioni mutue fra circuiti percorsi da corrente.

Coppia meccanica $\mathcal{M}$ causata alle interazioni fra i momenti magnetici della bobina mobile e degli avvolgimenti fissi, funzione della deflessione θ.

Coppia resistente dovuta alla molla: $\mathcal{M}_r = -k\theta$

Equilibrio: $\mathcal{M} + \mathcal{M}_r = 0$

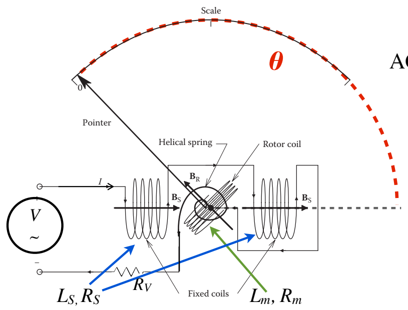
Energia magnetica: $W = \frac{1}{2} L_S i_M^2 + \frac{1}{2} L_m i_M^2 + M(\theta) i_M^2$

Coppia: $\mathcal{M} = -\left.\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|_{V_M = cost} \simeq K_m i_M^2$

in DC: $\mathcal{M} \simeq K_m i_M^2 = K_m \left[\frac{V}{R_s + R_m + R_V}\right]^2$

all'equilibrio: $\theta = \frac{K_m}{k} i_M^2 = \frac{K_m}{k}\left[\frac{V}{R_s + R_m + R_V}\right]^2$

Strumento elettrodinamico in AC



L_m, R_m : induttanza e resistenza del rotore
L_S, R_S : induttanza e resistenza dello statore
M: mutua induttanza, dipende da θ
$M(\theta) = K_m \cos\theta$
attorno a $\theta_0 = \pi/2$:
$M \simeq -K_m(\theta - \theta_0)$

Voltmetro

AC sinusoidale: la corrente vale (valore efficace)

$$I_{M,e} = \frac{V_e}{|R_s + R_m + R_V + j\omega(L_S + L_m)|} = \frac{V_e}{\sqrt{(R_s + R_m + R_V)^2 + \omega^2(L_S + L_m)^2}}$$

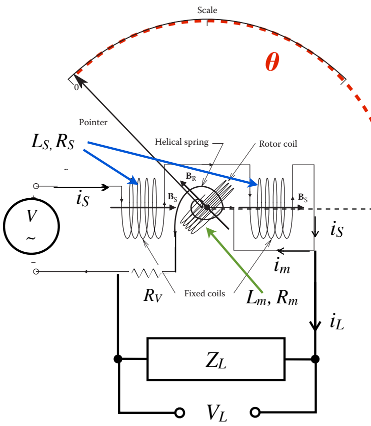
Supponendo tempi di risposta
lenti rispetto a ω^{-1}, all'equilibrio:

$$\theta = \frac{K_m}{k} I^2_{M,e} = \frac{K_m}{k} \frac{V_e^2}{(R_s + R_m + R_V)^2 + \omega^2(L_S + L_M)^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \left(\omega \frac{L_S + L_m}{R_s + R_m + R_V}\right)^2}} \frac{K_m}{k(R_s + R_m + R_V)^2} V_e^2$$

La sensibilità dipende da ω

"sensibilità" tipiche: 10÷50 Ω/V, molto minori degli strumenti di D'Arsoval
→ maggior assorbimento di corrente (→ wattmetro?)

Strumento elettrodinamico: Wattmetro



Si intende misurare la potenza attiva

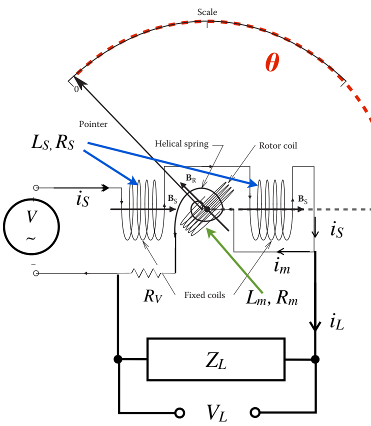
Energia magnetica: $W = \frac{1}{2} L_S i_S^2 + \frac{1}{2} L_m i_m^2 + M(\theta) i_S i_m$

Coppia: $\mathcal{M} = -\left.\frac{\partial W}{\partial \theta}\right|_{V_M = cost} \simeq K_m i_S i_m$

in DC, $i_m = V_L/(R_V + R_m)$; se $i_m \ll i_L$, $i_L \simeq i_S$

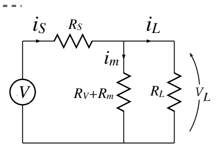
$$\theta = \frac{K_m}{k} i_m i_S \simeq \frac{K_m}{k} \frac{V_L}{R_V + R_m} i_L = \frac{K_m}{k(R_V + R_m)} P_L$$

Strumento elettrodinamico: Wattmetro



Voltmetro a valle

Schema di collegamento (es. DC)

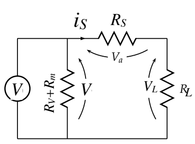


Voltmetro a valle

$V_m = V_L$, $I_S \neq I_L$:

$$\epsilon = \frac{I_S - I_L}{I_L} = \frac{I_m}{I_L} = \frac{R_L}{R_V + R_m}$$

→ carichi "piccoli"



Voltmetro a monte

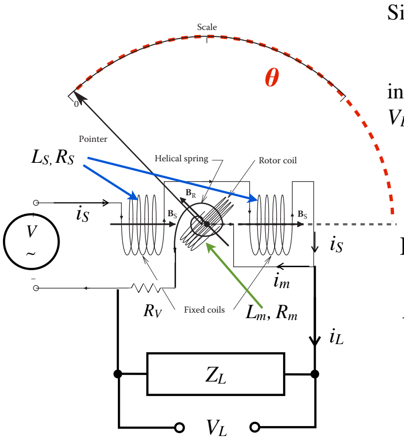
$V_m \neq V_L$, $I_S = I_L$:

$$\epsilon = \frac{V_m - V_L}{V_L} = \frac{V_a}{V_L} = \frac{R_S}{R_L}$$

→ carichi "grandi"

Strumento elettrodinamico: Wattmetro

Figura adattata da R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press

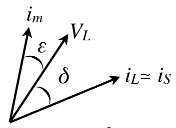


Si intende misurare la potenza attiva:

$P_L = V_{L,e} \cdot I_{L,e} \cdot \cos\delta$

in AC:

V_L , i_m , $i_L \simeq i_S$ sono sfasati.



$\phi = \delta + \varepsilon$

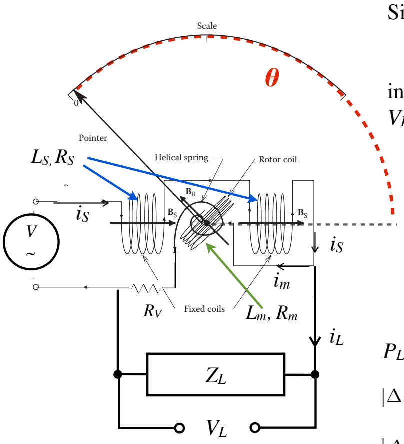
DC: $\theta = \frac{K_m}{k} i_m i_S \simeq \frac{K_m}{k} \frac{V_L}{R_V + R_m} i_L = \frac{K_m}{k(R_V + R_m)} P_L$

AC:
$$\theta = \frac{K_m}{k} I_{m,e} I_{S,e} \cos\phi$$
$$\simeq \frac{K_m}{k} \frac{V_{L,e}}{\sqrt{(R_V + R_m)^2 + (\omega L_m)^2}} i_{L,e} \cos\phi$$
$$= K V_{L,e} i_{L,e} \cos\phi \simeq K V_{L,e} i_{L,e} \cos\delta = K P_L$$

?

Strumento elettrodinamico: Wattmetro

Figura adattata da R. B. Northrop "Introduction to Instrumentation and Measurements", 3rd ed., CRC Press

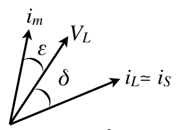


Si intende misurare la potenza attiva:

$P_L = V_{L,e} \cdot I_{L,e} \cdot \cos\delta$

in AC:

V_L , i_m , $i_L \simeq i_S$ sono sfasati.



$\phi = \delta + \varepsilon$

$$\theta = K V_{L,e} i_{L,e} \cos\phi \simeq K V_{L,e} i_{L,e} \cos\delta = K P_L$$

?

Sia ε piccolo (problema costruttivo su L_m)

$P_L = V_{L,e}\, I_{L,e} \cos\delta$

$$|\Delta P_L| = \left|\frac{\partial P_L}{\partial \delta}\right| d\delta = \left|\frac{\partial P_L}{\partial \delta}\right| \varepsilon = V_{L,e} I_{L,e} |\sin\delta| \cdot \varepsilon$$

$$\left|\frac{\Delta P_L}{P_L}\right| = \varepsilon \tan\delta$$

dipende dalla costruzione: piccolo ε

dipende dal carico: carichi reattivi
→ quadratura
→ aumenta l'errore percentuale!