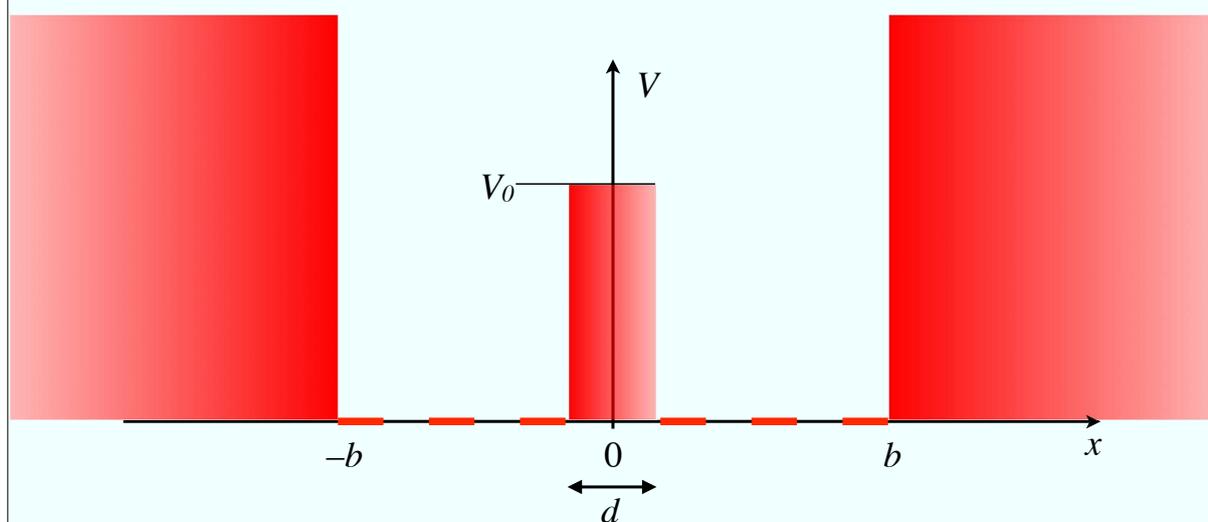


Doppia buca

(sistemi a due stati).

1

Doppia buca di potenziale.



$$V(x) = V_0 \text{ per } d/2 > |x|$$

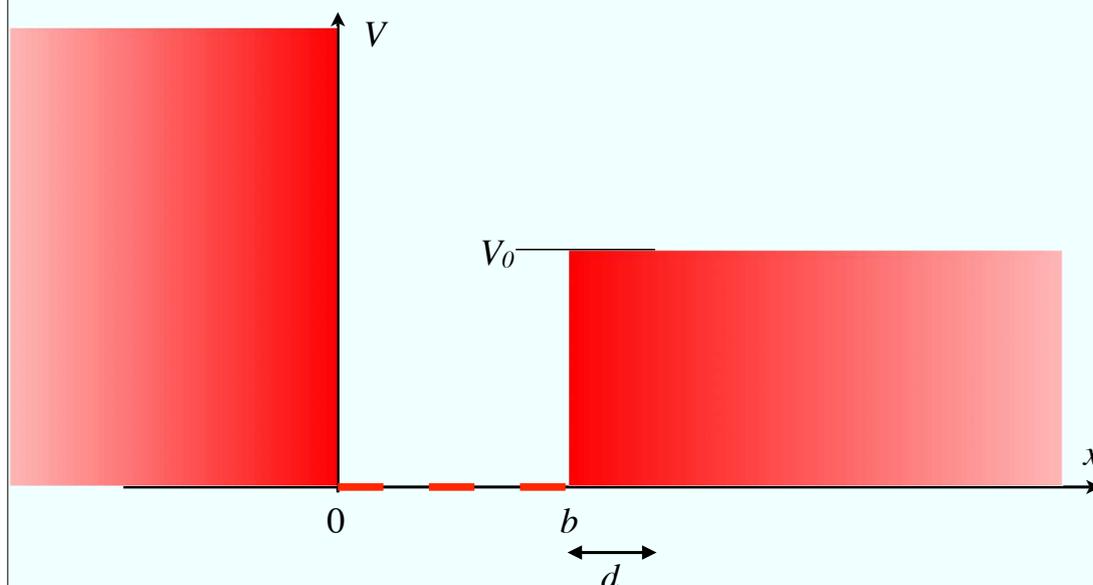
$$V(x) = 0 \text{ per } b > x > d/2 \text{ e per } -b < x < -d/2$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ per } x > b \text{ e } x < -b$$

esercizio:
discutere qualitativamente la
forma delle autofunzioni

2

Preliminare: buca asimmetrica.



$$V(x) = V_0 \text{ per } |x| > b$$

$$V(x) = 0 \text{ per } b > x > 0$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ per } x < 0$$

esercizio:
discutere qualitativamente la
forma delle autofunzioni

[http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/Sez. 2.5,2.6, oppure 2.8 CD \(doppia buca\)](http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/Sez.2.5,2.6,oppure2.8CD(doppia%20buca))

3

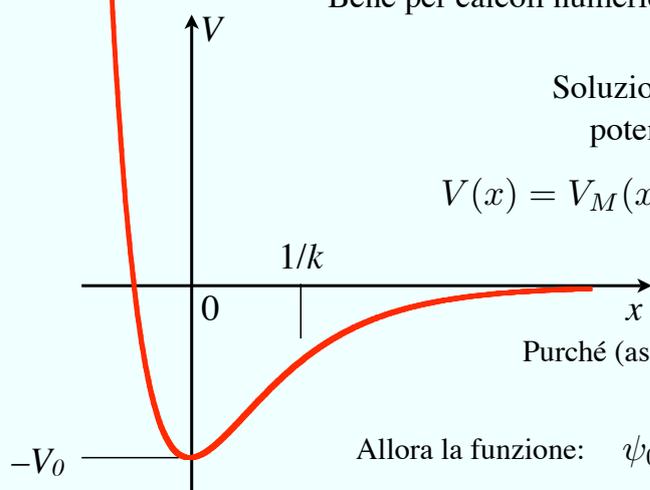
Buca asimmetrica: potenziale continuo.

Buca squadrata: raccordo delle fdo, delle derivate etc etc.
Bene per calcoli numerici (simulatori), ma procedura lunga.

Invece:

Soluzioni analitiche con il
potenziale di Morse:

$$V(x) = V_M(x) = V_0 (e^{-2kx} - 2e^{-kx})$$



Purché (assunzione): $V_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Allora la funzione: $\psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{kx}{2} - e^{-kx}\right)$

è lo stato fondamentale, soluzione dell'equazione di
Schroedinger con il più basso valore dell'energia:

$$E_0 = -\frac{V_0}{4}$$

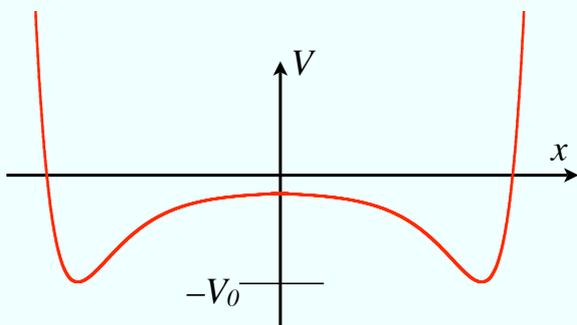
(verificare)

4

Doppia buca: potenziale continuo.

Doppio potenziale di Morse:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= V_M(b+x) + V_M(b-x) = \\
 &= 2V_0 \left[e^{-2kb} \cosh(2kx) - 2e^{-kb} \cosh(kx) \right] = \\
 &= V_0 \left[\frac{a^2}{2} \cosh(2kx) - 2a \cosh(kx) \right]
 \end{aligned}$$



avendo definito: $a = 2e^{-kb}$

Allora le funzioni (non normalizzate): sono le due soluzioni dell'equazione di Schroedinger con i più bassi valori dell'energia:

$$\psi_{pari}(x) = \cosh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

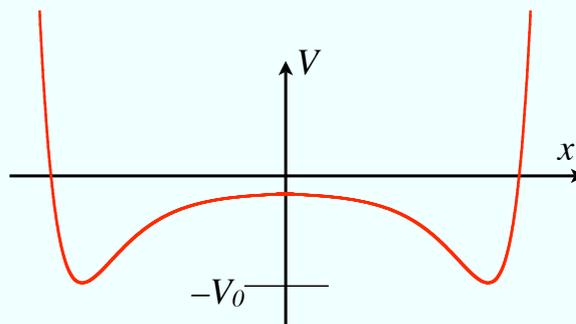
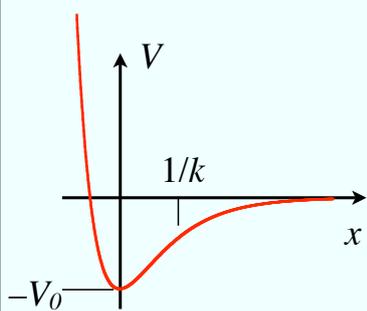
$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4} (1 - 2a^2 + 4a)$$

$$\psi_{dispari}(x) = \sinh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4} (1 - 2a^2 - 4a)$$

(verificare)

Doppia buca: effetti sull'energia.



$$\psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{kx}{2} - e^{-kx}\right)$$

$$\psi_{pari}(x) = \cosh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

$$E_0 = -\frac{V_0}{4}$$

$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4} (1 - 2a^2 + 4a)$$

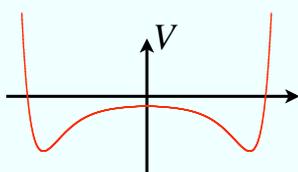
$$\psi_{dispari}(x) = \sinh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4} (1 - 2a^2 - 4a)$$

traslazione

separazione

Doppia buca: effetti sull'energia.



$$a = 2e^{-kb}$$

buche lontane, kb grande, $a \sim 0$:
livelli di singola buca.

buche vicine, kb piccolo:
traslazione verso energie negative più vicine
allo zero per lo stato fondamentale.
Separazione dei livelli!

$$\psi_{pari}(x) = \cosh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

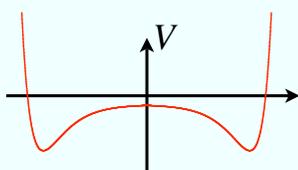
$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 + 4a)$$

livello di singola buca (red circle around $V_0/4$)
traslazione (blue line from $4a$)
separazione (green line from $2a^2$)

$$\psi_{dispari}(x) = \sinh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 - 4a)$$

Abbassamento del livello fondamentale.



$$a = 2e^{-kb}$$

buche lontane, kb grande, $a \sim 0$:
livelli di singola buca.

Traslazione: effetto del maggior confinamento

Richiamo: in una buca infinita di larghezza L ,
lo stato fondamentale è $E \sim 1/L^2$.

$$\psi_{pari}(x) = \cosh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

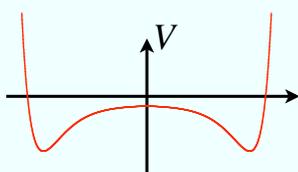
$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 + 4a)$$

livello di singola buca (red circle around $V_0/4$)
traslazione (blue line from $4a$)
separazione (green line from $2a^2$)

$$\psi_{dispari}(x) = \sinh(kx/2)e^{-a \cosh(kx)}$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 - 4a)$$

Separazione dei livelli.



$$a = 2e^{-kb}$$

$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 + 4a)$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 - 4a)$$

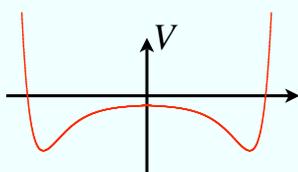
separazione: $\hbar\omega = E_{dispari} - E_{pari} = 2V_0a$

questa equazione definisce la cosiddetta frequenza di Bohr.

La prossimità di due buche determina la separazione dei livelli energetici.

È possibile assorbire/emettere fotoni di frequenza $\nu = \omega/2\pi$

Evoluzione temporale.



$$a = 2e^{-kb}$$

$$E_{pari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 + 4a)$$

$$E_{dispari} = -\frac{V_0}{4}(1 - 2a^2 - 4a)$$

Separazione: effetto tunnel.

$$\psi_{destra}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{pari}(x) + \psi_{dispari}(x)]$$

$$\psi_{sinistra}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{pari}(x) - \psi_{dispari}(x)]$$

A $t = 0$ posso costruire uno stato localizzato in una delle due buche:

(verificare)

Per cui:
$$\Psi_{destra}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{pari}(x) e^{-i\frac{E_{pari}}{\hbar}t} + \psi_{dispari}(x) e^{-i\frac{E_{dispari}}{\hbar}t} \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_{pari}}{\hbar}t} \left[\psi_{pari}(x) + \psi_{dispari}(x) e^{-i\frac{E_{dispari} - E_{pari}}{\hbar}t} \right] =$$

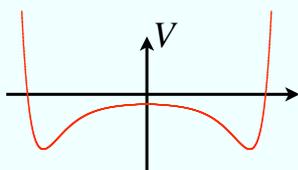
$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_{pari}}{\hbar}t} [\psi_{pari}(x) + \psi_{dispari}(x) e^{-i\omega t}]$$

avendo definito la frequenza di Bohr: $\hbar\omega = E_{dispari} - E_{pari} = 2V_0a$

Dopo un tempo $t = \pi/\omega$,
$$\Psi_{destra}(x, \pi/\omega) = e^{-i\phi} \psi_{sinistra}(x)$$



Doppia buca: evoluzione temporale.



$$a = 2e^{-kb}$$

$$\Psi_{destra}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{E_{pari}}{\hbar} t} [\psi_{pari}(x) + \psi_{dispari}(x) e^{-i\omega t}]$$

$$\hbar\omega = E_{dispari} - E_{pari} = 2V_0 a$$

$$\text{Dopo un tempo } t = \pi/\omega, \quad \Psi_{destra}(x, \pi/\omega) = e^{-i\phi} \psi_{sinistra}(x)$$

Una particella collocata inizialmente in una delle due buche, oscilla fra gli stati localizzati nelle due buche con frequenza ω .

Questo accade in linea di principio anche per buche molto lontane fra loro, ma il tempo di tunnel diventa grandissimo (a molto piccolo).

Simulazioni:

<http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/>
 Sez. 2.5, 2.6 (doppia buca)
 Sez. 3.5 (molecola di Ammoniaca)

<http://www.falstad.com/qm1d/>

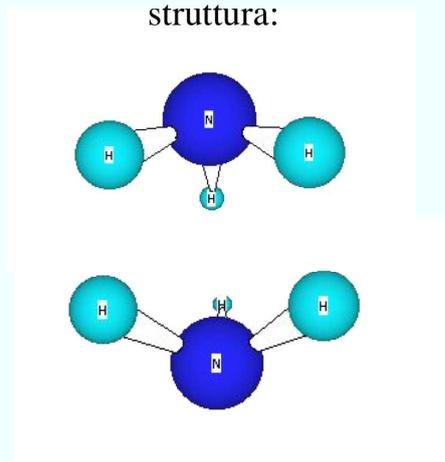
Ammoniaca



Figura da Wikipedia

Il potenziale a doppia buca è un buon modello per la molecola di ammoniaca, NH_3 .

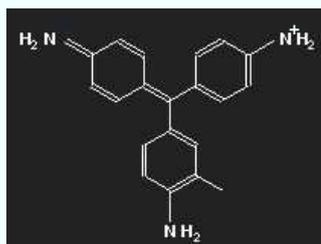
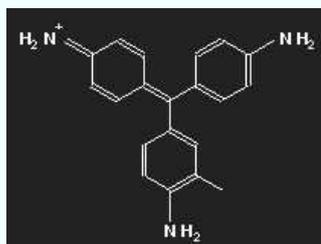
Nell'ammoniaca, $\omega/2\pi \approx 24$ GHz.
La molecola può quindi *invertire* la sua struttura:



13

Il colorante Magenta

Fuchsina



Anch'esso un sistema a due stati, ma con differenze in energia più grandi:

assorbe fotoni nello spettro visibile, in particolare il colore magenta.

14