Stati stazionari

Enrico Silva - diritti riservati - Non è permessa, fra l'altro, l'inclusione anche parziale in altre opere senza il consenso scritto dell'autore

Stati stazionari

Cosa rappresenta la fdo otenuta per separazione di variabili?
Cosa rappresenta la costante *E*?

Richiamo. *V non dipenda dal tempo*.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V\Psi=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Assumendo $\Psi(x,t)=f(t)\psi(x)$

$$\begin{cases} f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t} \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+V\psi=E\psi \end{cases}$$

Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo.

$$\Rightarrow \quad \Psi(x,t)=\psi(x)f(t)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t}$$

Soluzioni separabili: $\Psi(x,t) = \psi(x) f(t) = \psi(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t}$

Le soluzioni separabili sono stati stazionari

ovvero:

1- la densità di probabilità non varia nel tempo.

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^*(x) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t} \psi(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t} = |\psi(x)|^2$$

2-la posizione (valore aspettato) non varia nel tempo.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t} x \psi \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* x \psi dx$$

(2b- il momento (la quantità di moto) è nullo.)

$$\text{se } \langle x \rangle = cost, \quad \langle p \rangle = m \frac{d \langle x \rangle}{dt} = 0$$

e in generale ogni valore d'aspettazione di una variabile dinamica è costante: i termini esponenziali immaginari si elidono sempre.

Richiamo: soluzioni separabili: $\Psi(x,t) = \psi(x) f(t) = \psi(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t}$

3- le soluzioni separabili hanno energia totale definita

L'hamiltoniana *H* (energia totale *K*+*V*) è: $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \widehat{H}\psi = E\psi$$

$$\langle H \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \widehat{H} \psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* E \psi dx = E \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = E$$

Nota: solo un *numero* può essere scambiato con una fdo. L'operatore deve restare dove opera.

Soluzioni separabili: autostati dell'energia.

... le soluzioni separabili hanno energia totale definita

$$\widehat{H}\psi = E\psi \qquad\qquad \langle H \rangle = E$$

Per verificare che l'energia sia definita precisamente, calcolo la varianza di $\widehat{H}$: $\sigma_H^2 = \left\langle H^2 \right\rangle - \langle H \rangle^2$

Cerco $\left\langle H^2 \right\rangle$

Noto che $\widehat{H}^2\psi = \widehat{H}(\widehat{H}\psi) = \widehat{H}(E\psi) = E(\widehat{H}\psi) = E^2\psi$

Allora $\left\langle H^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \widehat{H}^2 \psi dx = E^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = E^2$

$$\Rightarrow \quad \sigma_H^2 = \left\langle H^2 \right\rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0$$

Ogni misura dell'energia su uno stato descritto da una fdo separabile fornisce con certezza il valore *E*.

Le soluzioni separabili hanno energia totale definita.
Ogni misura dell'energia su uno stato descritto da una fdo separabile fornisce con certezza il valore *E*.

Questo <u>non</u> significa che lo stato di un <u>sistema</u> sia a energia definita!

Poiché l'eq. di Schrödinger è lineare, la fdo che descrive un sistema di hamiltoniana *H* è una *combinazione lineare* delle soluzioni separabili.
In altre parole, se

$$\Psi_A(x,t) = \psi_A(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_A}{\hbar}t} \qquad \text{e} \qquad \Psi_B(x,t) = \psi_B(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_B}{\hbar}t}$$

sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Anche $\Psi_{AB}(x,t) = a\psi_A(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_A}{\hbar}t} + b\psi_B(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_B}{\hbar}t}$ è soluzione,

ma non ha energia univocamente definita.

Sovrapposizioni di stati stazionari

1- Le soluzioni separabili hanno energia totale definita.
2- Combinazioni lineari di stati stazionari sono ancora soluzioni, ma a energia non definita.

Dato un certo sistema (ovvero data una hamiltoniana), una volta:
- trovati gli stati stazionari (autofunzioni dell'energia)
- trovati i valori permessi dell'energia (autovalori)

si costruisce la soluzione generica come combinazione lineare:

$$\Psi_{generale}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_n}{\hbar}t}$$

e infine
- si cercano i valori di c_n per cui la fdo soddisfa le *condizioni al contorno*.

Notare: tutto ciò comporta risolvere solo l'equazione *non dipendente dal tempo*: la soluzione generale viene poi costruita dalle proprietà generali "appendendo" a ciascuna autofunzione dell'energia il termine esponenziale.

Sovrapposizioni di stati stazionari (2)

1- Le soluzioni separabili hanno energia totale definita.
2- Combinazioni lineari di stati stazionari sono ancora soluzioni, ma a energia non definita.
3- La soluzione generale è:

$$\Psi_{generale}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_n}{\hbar}t}$$

I vari termini che compongono l'equazione generale *variano nel tempo in differente maniera*.
La particella (descritta da Ψ) nel tempo "attraversa" diversi stati energetici.

c_n : numeri *complessi*; ciascuno aggiunge un termine di fase relativa!

–> Teorema: le $\psi(x)$ possono sempre essere scelte reali (dimostrare)

Suggerimento: supponendo che una soluzione ψ di energia E sia complessa, sfruttare il fatto che anche ψ^* è soluzione con energia E (controllate). Allora anche $\psi+\psi^*$ e $\mathrm{i}(\psi-\psi^*)$ sono soluzioni (proprietà di linearità).

Sovrapposizioni di stati stazionari (3)

1- Le soluzioni separabili hanno energia totale definita.

2- Combinazioni lineari di stati stazionari sono ancora soluzioni, ma a energia non definita.

3- La soluzione generale è:

$$\Psi_{generale}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_n}{\hbar}t}$$

4- Le ψ_n possono essere prese reali.

5- Teorema: $E > V_{minimo}$ per avere soluzione normalizzabile.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi$$

Se $E < V_{minimo}$, allora sia ψ che la derivata seconda hanno sempre stesso segno

-> ψ diverge all'infinito.

6- Teorema: Se $V(x)$ è pari, ovvero $V(x)=V(-x)$, le $\psi_n(x)$ (autofunzioni dell'energia) possono sempre essere scelte pari o dispari.

Suggerimento: simmetria di $|\psi|^2$, unita alla proprietà (4).