Indeterminazione

Finora si sono considerate le proprietà ondulatorie, lavorando sulla *fase* di una (per ora non meglio specificata) funzione. Si sono ricavate o ipotizzate relazioni per:

- lunghezza d'onda e momento
- energia e frequenza
- velocità di fase e di gruppo

Ancora non abbiamo considerato da vicino le proprietà corpuscolari, e in particolare la *posizione* della particella associata all'onda.

Onde vs. corpuscoli

Solide prove sperimentali che materia/luce presentino comportamento ondulatorio.
Solide prove sperimentali che materia/luce presentino comportamento corpuscolare.

⇨ ?

Assunzione: l'ampiezza di un'onda [di materia] racchiude informazioni sulla posizione della particella.
Ampiezza elevata -> elevata *probabilità* di trovare la particella

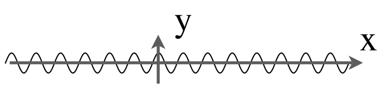
Ampiezza uniforme su un'ampia regione: equiprobabilità di trovare la particella nella regione stessa: particella *delocalizzata*.

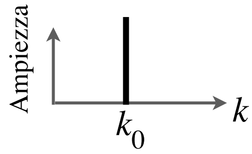
Circoscrivere la regione dove la particella può trovarsi:
costruire un *pacchetto d'onde*.

Posizione vs. numero d'onda

Onda armonica (a $t=0$). Infinitamente estesa. Lunghezza d'onda λ_0. Numero d'onda $k_0=2\pi/\lambda_0$

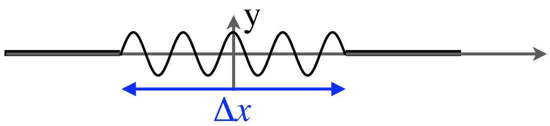
Posizione completamente delocalizzata. Numero d'onda (=momento) perfettamente definito

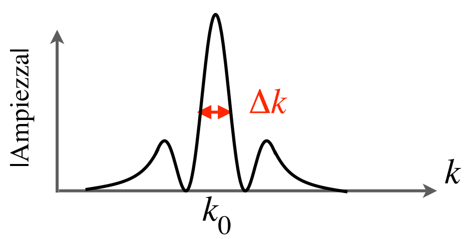




Tratto di onda armonica di lunghezza Δx.
Costruzione del pacchetto d'onde mediante serie di Fourier con ampiezze dipendenti da k.

Onda localizzata <–> distribuzione di numeri d'onda con larghezza Δk attorno a $k_0 = 2\pi / \lambda_0$.





Principio di indeterminazione

Per un pacchetto d'onda: $\Delta k\ \Delta x \sim 1$ (adimensionale)

Nota: è una proprietà generale dei pacchetti d'onda, non riguarda la MQ

Pacchetti d'onda molto localizzati <–> ampio *spettro* di numeri d'onda ovvero ampio intervallo di momento

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Pacchetti d'onda con piccola distribuzione di *k* <–> particella delocalizzata e valore preciso di momento

Sperimentale: una particella è descrivibile come un pacchetto d'onda!

Poiché $k = \frac{2\pi}{h} p \longrightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{h} \Delta p \longrightarrow \boxed{\Delta p \Delta x \sim \hbar}$

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Non è possibile misurare simultaneamente (la stessa componente per) la posizione e il momento di una particella con precisione illimitata

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$$
$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar/2$$
$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar/2$$

Non è una limitazione strumentale,
è insito nella rappresentazione in termini di onde di materia.

Vale l' "=" per un pacchetto gaussiano, il "≥" per un altro tipo di pacchetto d'onda.

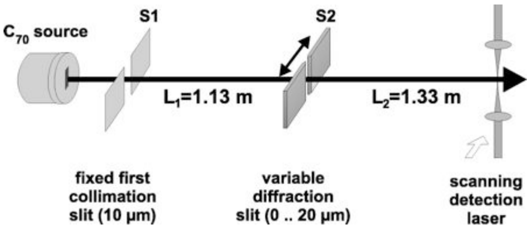
Non è lecito pensare alla traiettoria della particella classica (Newtoniana), con momento *p* e posizione *x*(*t*) esattamente definite.

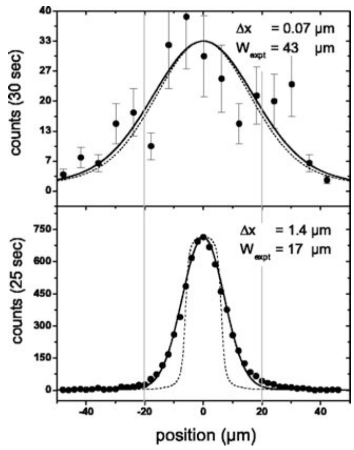
Verifica del principio di indeterminazione

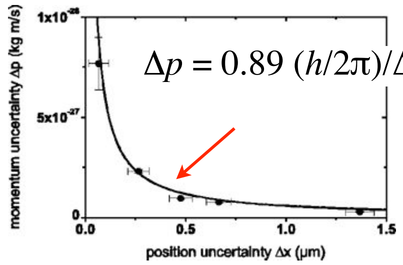
O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger, Physical Review A **65**, 032109 (2002)

misura indiretta

Fascio di molecole di C_{70} collimate







$\Delta p = 0.89\,(h/2\pi)/\Delta x$

Δx: larghezza della fenditura

Δp: ottenuta dall'allargamento del fascio

Stabilità della materia e indeterminazione

Perché la materia non collassa?

Nota: le orbite stazionarie di Bohr violano il principio di indeterminazione!

Elettrone che si trovi esattamente nel minimo dell'energia potenziale
(ad esempio, proprio su un nucleo):
estremamente ben localizzato.

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

=> grande indeterminazione sul momento,
ovvero: il pacchetto d'onda corrispondente conterrebbe molte componenti a grande p con peso significativo.
=> grande energia cinetica!

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

=> un elettrone non può trovarsi esattamente in un punto
(ad esempio nel minimo del potenziale)!

La materia non collassa.

Dimensioni atomiche (ordine di grandezza)

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

Assumiamo che l'elettrone giaccia su un orbita circolare (per semplicità). Allora la "lunghezza d'onda" dell'elettrone deve adattarsi a un cerchio di lunghezza $2\pi r$.
Il momento è allora (relazione di de Broglie): $p = h/\lambda \sim \hbar/r$

L'energia totale è la somma di energia cinetica e potenziale:

$$E_{tot} = K + U = \frac{p^2}{2m} + (-e)\left[V(r) - V(\infty)\right] =$$
$$= \frac{p^2}{2m} - e\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Esercizio: mostrare che in meccanica classica l'energia non è limitata inferiormente (ovvero, l'elettrone collassa nell'origine). Suggerimento: scrivere *p* (in meccanica classica) per un moto circolare

che ha un minimo a distanza finita! *La materia non collassa*.

La stima del raggio dell'atomo di idrogeno fornisce (dal minimo di *E*)

$$r_{min} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 0.528 \text{Å}$$

E l'energia corrispondente:

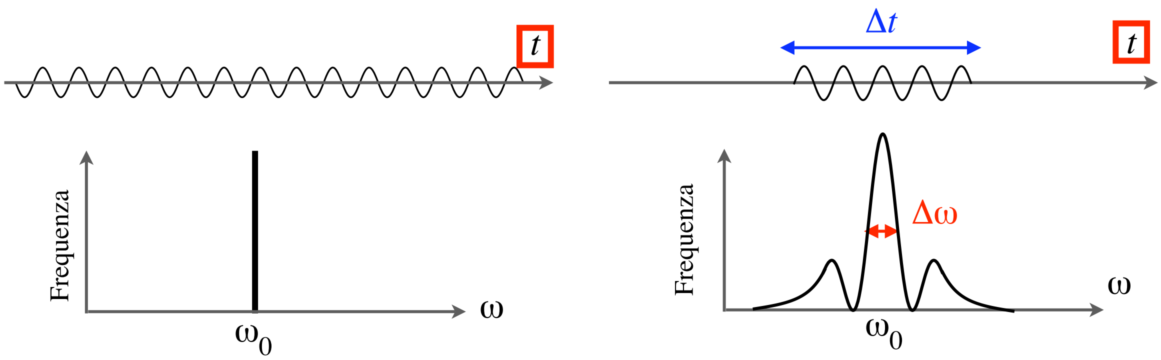
$$E_{min} = E(r_{min}) \simeq -13.6 \text{ eV}$$

negativa: stato legato.

$1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{-19} \text{J}$

Indeterminazione energia/tempo

La particella/onda evolve ("si propaga") anche nel tempo. Quindi, a *x* fissata,



$$2\pi\Delta\nu\Delta t \geq 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Uno stato con energia estremamente ben definita esiste per un tempo lungo. ("la frequenza deve essere ben definita")

Uno stato che decade in tempi brevi non ha energia ben definita ("sovrapposizione di onde a varie frequenze")

Indeterminazione energia/tempo

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Si può ottenere:

1] per analogia con il pacchetto gaussiano, per cui si può dimostrare che

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1$$

2] partendo dal principio di indeterminazione posizione/momento:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

usando la definizione di velocità di gruppo: $v_g = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta k}$

il concetto di posizione per una particella: $\Delta x = v_g \Delta t$

e la relazione numero d'onda - momento: $\Delta p = \hbar \Delta k$

Riassunto

Gli esperimenti indicano che una teoria quantistica dovrà contenere:

- Natura ondulatoria e corpuscolare.
- Probabilità.
- Stati stazionari, energie discrete per stati legati.
- Indeterminazione.