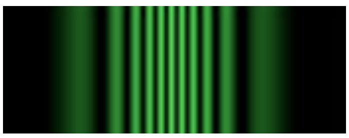
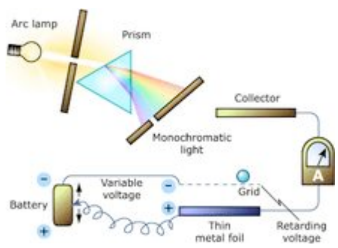
De Broglie

Onde elettromagnetiche o particelle?

Comportamento ondulatorio:
- Interferenza
- Diffrazione
- Polarizzazione



Comportamento corpuscolare:
- Effetto fotoelettrico
- Effetto Compton



"A tentative theory of light quanta"

Relazioni classiche:
Corpi materiali: massa m, velocità $\boldsymbol{v}$, momento $\boldsymbol{p}$.
Onde: lunghezza d'onda, velocità di fase, velocità di gruppo.

1924: De Broglie (Nobel 1929) cerca di costruire una teoria consistente, a partire dall'assunto che i fotoni fossero effettivamente particelle.

Ipotesi fondamentali:
- i fotoni hanno energia $h\nu$, ed eventualmente una massa m_0
- sussiste l'equivalenza massa-energia della relatività ristretta: $E=mc^2$
- sussistono le relazioni proprie delle onde fra velocità, frequenza, etc.

Allora:

I fotoni hanno momento $p=h/\lambda$

Attenzione: la teoria è ricavata per particelle con massa $m_0 \neq 0$ e quindi in linea di principio adatta a ogni corpo!

De Broglie: onde di materia

"We are then inclined to suppose that *any* moving body may be accompanied by a wave and that it is impossible to disjoin motion of the body and propagation of the wave"

A qualunque particella o corpo in moto con velocità v sarebbe comunque associata una lunghezza d'onda λ.

Velocità dell'onda/particella di De Broglie

Premessa: la relatività ristretta asserisce che, detta m_0 la massa a riposo di una particella, la sua massa quando è in moto con velocità v si trasforma come:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{con} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Cerchiamo la velocità dell'onda associata a una particella.

Nel seguito il pedice "w" indica grandezze concettualmente relative all'onda, il pedice "p" grandezze concettualmente relative alla particella.

$$p = \frac{h}{\lambda_w} \qquad \text{ma anche} \quad p = mv_p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v_p \quad \Rightarrow \quad \lambda_w = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v_p}$$

$$E = h\nu_w \qquad \text{ma anche} \quad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \nu_w = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad v_w = \lambda_w \nu_w = \frac{c^2}{v_p} > c \qquad !$$

Velocità dell'onda/particella di De Broglie (2)

In questo lucido, il pedice "w" indica grandezze concettualmente relative all'onda, il pedice "p" grandezze concettualmente relative alla particella.

$$\lambda_w = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v_p} \qquad \nu_w = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad v_w = \lambda_w \nu_w = \frac{c^2}{v_p} > c \quad !$$

Richiamo:
velocità di fase e velocità di gruppo

velocità di fase: $v_f = \frac{\omega}{k}$

velocità di gruppo: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Effettuando i calcoli:

Esercizio: dimostrare

$$\boxed{\begin{aligned} v_f &= \lambda_w \nu_w = v_w \\ v_g &= v_p \end{aligned}}$$

(trucco: $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\beta}\frac{1}{\frac{dk}{d\beta}}$) (richiamo: ω = 2πν ; $k = 2\pi/\lambda$; $\beta = v_p / c$)

Velocità dell'onda/particella di De Broglie (3)

In questo lucido, il pedice "w" indica grandezze concettualmente relative all'onda, il pedice "p" grandezze concettualmente relative alla particella.

$$\lambda_w = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v_p} \qquad \nu_w = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

velocità di gruppo

$$v_g = v_p$$ Dimostrazione.

Essendo: $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\beta}\frac{1}{\frac{dk}{d\beta}}$

Si tratta di scrivere ω e k <u>in funzione del parametro β</u> = v_p / c.

$$\omega = 2\pi\nu_w = 2\pi\frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0c^2}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_w} = 2\pi\frac{m_0 v_p}{h\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Effettuando le derivate, segue la tesi.

Onde di materia: dispersive

velocità di fase: $v_f = \frac{\omega}{k}$

ma k dipende dal momento p: $k = \frac{2\pi}{h}p$
(perché $p = h/\lambda = hk/2\pi$)

La velocità di fase *dipende dalla lunghezza d'onda.*

$$v_g \neq v_f$$

Le onde di materia sono intrinsecamente dispersive.

Digressione: $\hbar$

In molti casi si preferisce usare la costante di Planck razionalizzata:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1.05457 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

per cui:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad E = h\nu = \hbar\omega \qquad \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

rivedere l'applet GroupVelocity.html

http://www.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/sines/GroupVelocity.html

con $v_g < v_f$