

# Onde elettromagnetiche

## Campo determinato da cariche in moto

Campo elettrico  $\mathbf{E}$  dato da una carica puntiforme collocata in  $\{x_0, y_0, z_0\}$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{con} \quad \mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

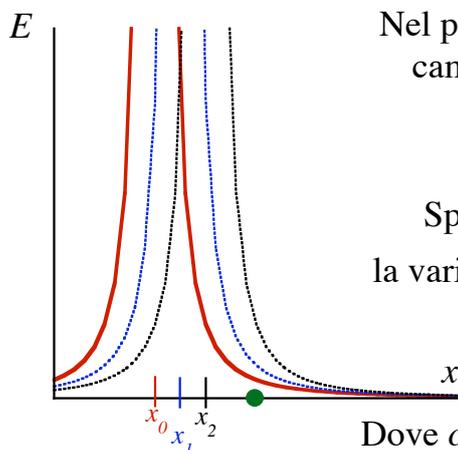
La carica viene spostata “istantaneamente” in  $x_1$ .

Nel punto indicato in **verde**, la variazione del campo giunge dopo un certo tempo dallo spostamento della carica, dato da:

$$\delta t_1 = (x_1 - x_0)/c$$

Spostando ulteriormente la carica in  $x_2$ , la variazione del campo giunge dopo il tempo:

$$\delta t_2 = (x_2 - x_1)/c$$



Dove  $c$  è la *velocità di propagazione del campo*.  
(velocità della luce)

## Esempio: carica oscillante

animazione  
Wave.swf

mostra l'andamento del *valore algebrico* del campo elettrico.

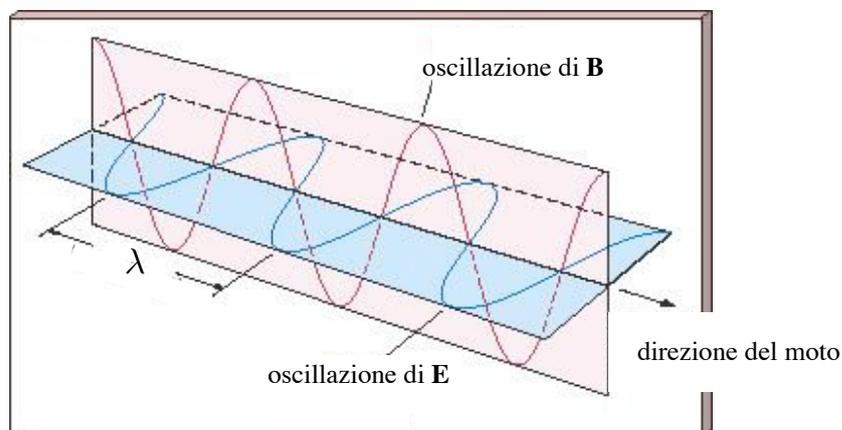
reperibile online a:

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/EM/LightWave/Wave.html>

SQ

## Onde elettromagnetiche

Ad ogni campo elettrico variabile è associato un campo magnetico.  
In un' "istantanea" a un certo tempo, l'onda elettromagnetica si presenta come:



carica oscillante:  
animazione  
EMWave.swf

reperibile online a:

<http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/Flash/EM/EMWave/EMWave.html>

## Onde e.m.: richiami analitici.

Maxwell => equazione delle onde per  $\mathbf{E}$  (idem per  $\mathbf{B}$ ):  $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

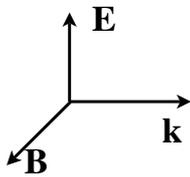
=> velocità di propagazione:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$

nel vuoto,  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 2.9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$

$$\omega = ck = c \frac{2\pi}{\lambda}$$

Onda e.m. armonica:  $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$\mathbf{k}$  indica la direzione di propagazione,  
 $\mathbf{r}$  la distanza orientata del punto dall'origine



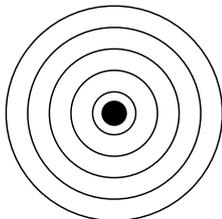
Nel vuoto le onde sono trasversali:  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$

poiché  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow -\omega \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$

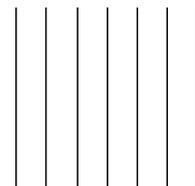
per cui  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$

## Onde e.m. piane

In generale le onde generate da cariche oscillanti sono di forma spaziale complessa, spesso descrivibili come onde *sferiche* (i *fronti d'onda* sono sfere).



A grande distanza dalla sorgente è spesso possibile approssimare le onde come *onde piane*.

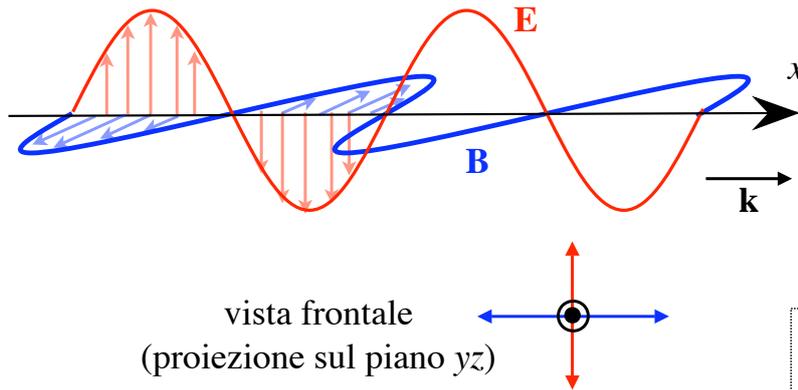


$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

## Polarizzazione

Il piano di vibrazione del campo, p.es.,  $\mathbf{E}$ , può variare nel tempo.  
 Nel caso che esso rimanga il medesimo, l'onda e.m. si dice  
*polarizzata linearmente*.

In questo caso il vettore campo, p.es.,  $\mathbf{E}$ , è diretto sempre lungo una medesima direzione. In un dato punto dello spazio varia solo la sua intensità e il suo verso.



rivedere  
 l'animazione  
 EMWave.swf

## Energia di un'onda e.m.

Le onde e.m. trasportano *energia*.

Quantità di energia trasportata nell'unità di tempo  
 attraverso una sezione unitaria (*vettore di Poynting*):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad [\mathbf{S}] = \text{Wm}^{-2}$$

*Intensità* (locale e istantanea) dell'onda e.m.:

$$\mathfrak{S} = |\mathbf{S}| = \frac{E^2}{c\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$$

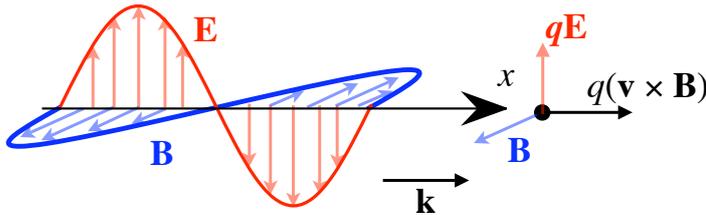
*Intensità media* (media su un periodo):

$$\bar{\mathfrak{S}} = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{S}| dt$$

## Quantità di moto di un'onda e.m.

Le onde e.m. trasportano *quantità di moto*.

Consideriamo un'onda polarizzata come in precedenza, incidente su una carica  $q$  inizialmente in quiete. La carica è sottoposta alla forza (“elettrica”)  $q\mathbf{E}$ , e quindi acquista una certa velocità  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$ . Pertanto, è sottoposta alla forza (“magnetica”)  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \parallel \mathbf{k}$ , e quindi *acquista una quantità di moto nella direzione di propagazione dell'onda*.



Si dimostra che la quantità di moto trasportata dall'onda e.m. è

$$p = \frac{\text{energia}}{\text{velocità}} = \frac{U}{c}$$

L'energia e il momento trasferiti dipendono dalle ampiezza dei campi, ovvero dall'intensità.

## La luce

## La luce è un'onda?

L'argomento fu oggetto di amplissimi dibattiti.  
Newton sosteneva fortemente la natura *corpuscolare* della luce.

Se invece la luce ha natura ondulatoria, deve presentare:

- Interferenza
- Diffrazione
- Polarizzazione

## Esperienza di Young: onde vs. particelle

Due fenditure sottili, praticate in uno schermo opaco, vengono illuminate da una medesima sorgente luminosa.

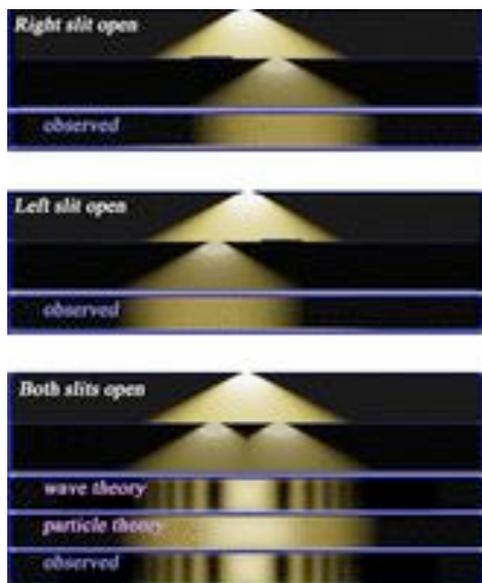


figura: da wikipedia

Se la luce avesse natura *corpuscolare*  
l'intensità sarebbe semplicemente la  
somma delle intensità relative a ciascuna  
fenditura aperta singolarmente.  
(Newton)

Se la luce avesse natura *ondulatoria*  
l'intensità sarebbe l'effetto della  
*interferenza* dovuta alla *somma*  
*vettoriale dei campi* relativi a ciascuna  
fenditura aperta singolarmente.

Note interessanti su: <http://www.juliantrubin.com/bigten/youngdoubleslit.html>  
<http://www.cavendishscience.org/phys/tyoung/tyoung.htm>

## Esperienza di Young: interferenza

Mediante uno schermo con due fenditure sottili (larghezza  $a \sim \lambda$ ) si ottengono due sorgenti fra loro *coerenti* (con relazione di fase fissa fra loro). A grande distanza dalle fenditure ( $\rightarrow$  onda piana) si colloca lo schermo.

*Sullo schermo si osservano frange di interferenza*

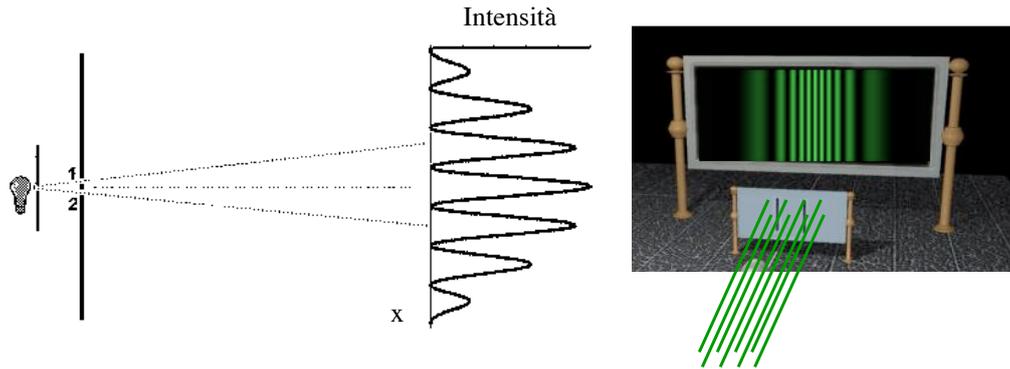
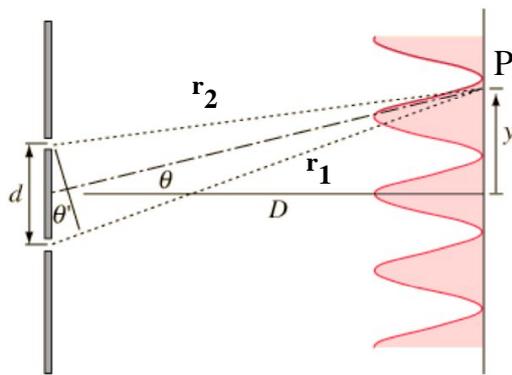


figura da:  
<http://www.colorado.edu/physics/2000/schroedinger/two-slit2.html>

## Esperienza di Young: discussione



<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/slits.html>

Dalle due fenditure si propagano due onde, in fase e di stessa ampiezza:

$$\mathbf{E}_{1,2} = \vec{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}$$

In P il campo vale:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$   
 $= \vec{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t + \phi)} \left[ e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} + 1 \right]$

e l'intensità media:

$$\bar{S} \propto |\mathbf{E}|^2 = 4|\vec{E}_0|^2 \cos^2 \left( \frac{\Delta\varphi}{2} \right)$$

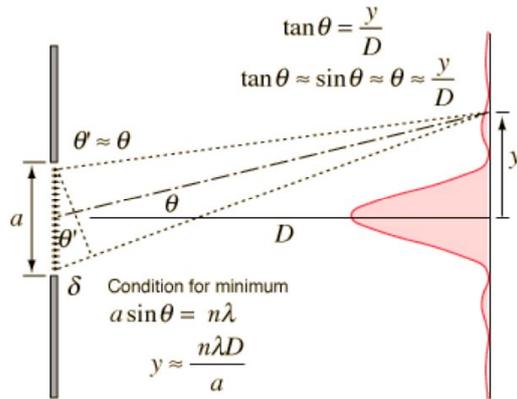
con (raggi quasi paralleli)  $\Delta\varphi = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \simeq k \cdot (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$   
 a grande distanza  $D \gg d$ , quindi  $\theta \approx \theta'$

Massimi:  $d \sin \theta = n\lambda$

zeri:  $d \sin \theta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$

## Diffrazione: la fenditura

Fenditura di larghezza  $a$ .  
 Ogni punto della fenditura si comporta come una sorgente in fase (Huygens)



$$I = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

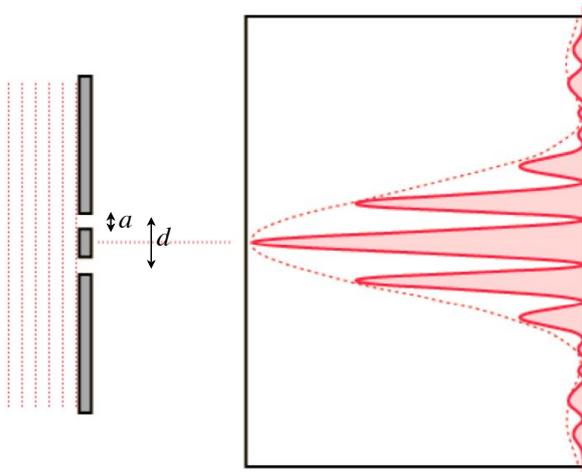
$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

Massimo intenso in  $\theta = 0$ .  
 minimi per  $a \sin \theta = n \lambda$

vedi anche

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/slits.html>

## Doppia fenditura larga



Fenditure di larghezza  $a$ , distanti  $d$ .  
 Ogni fenditura contribuisce con

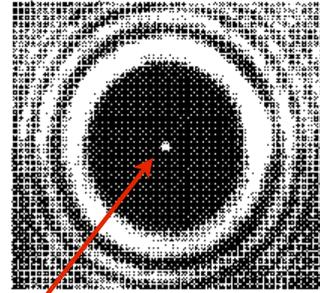
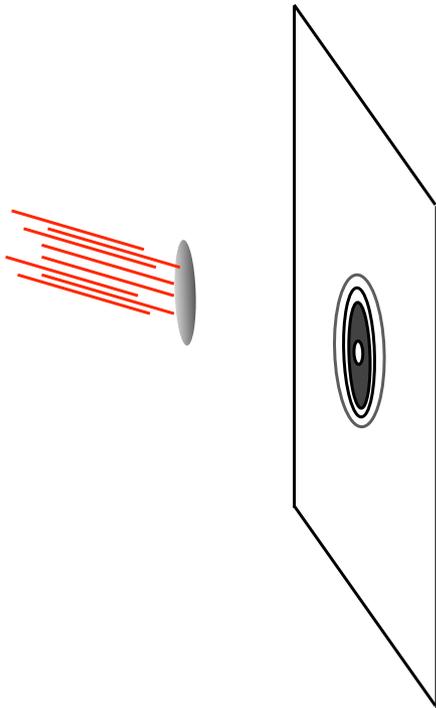
$$I = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

modulazione della figura di  
 interferenza:

$$\bar{S} \propto |\mathbf{E}|^2 = 4\bar{S}_{unafend} \cos^2 \left( \frac{\Delta \varphi}{2} \right) = 4I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \right)$$

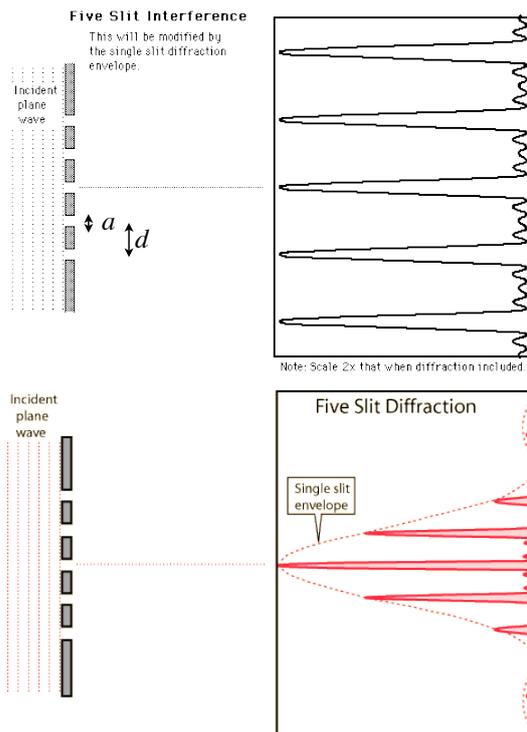
## Diffrazione da oggetti opachi.



Notare il punto luminoso al centro  
(macchia di Poisson/Fresnel/Arago)

Figura di alta qualità su Halliday, Resnick, Walker,  
*Fondamenti di Fisica*, Quinta edizione (2001), Casa Editrice  
Ambrosiana, cap. 37

## Reticolo di diffrazione



$N$  fenditure di larghezza  $a$  collocate  
a distanza  $d$  (*passo* del reticolo)

$$\tilde{S} = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

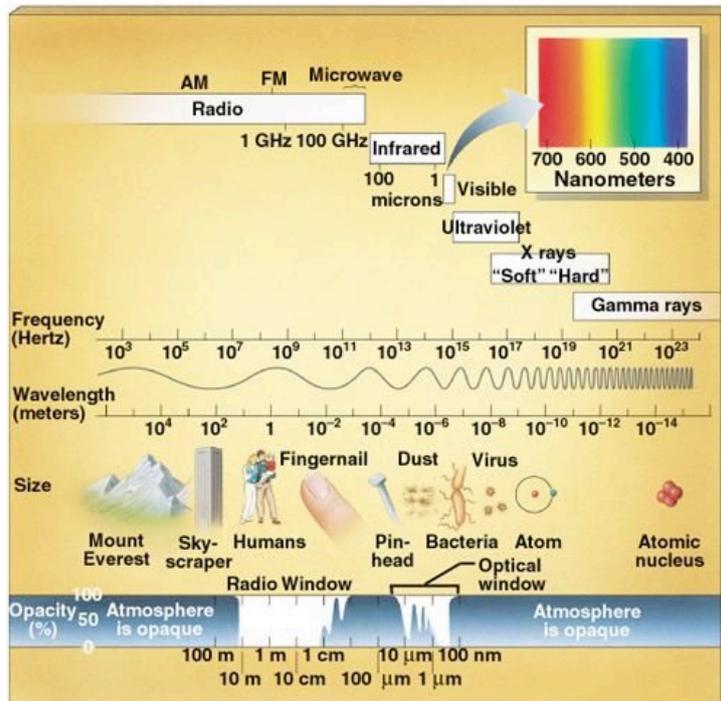
Per fenditure sottili, ho alcuni  
massimi molto intensi ( $\sim N^2$ ) in

$$d \sin \theta = n\lambda$$

ovvero per angoli (con piccole  
deflessioni)  $\theta \cong \sin \theta = n \frac{\lambda}{d}$

-> analizzatore di spettro

# La luce ha natura ondulatoria!



## Riassunto

- Cariche in moto determinano una perturbazione che *si propaga*.
- Le *onde elettromagnetiche* si propagano con velocità  $c$  (nel vuoto).
- Onde piane. Energia e quantità di moto di un'onda e.m.
- Interferenza della luce: esperienza di Young.
- Diffrazione della luce: fenditura, doppia fenditura, reticolo.

La luce ha natura ondulatoria

## Cosa possiamo “vedere”?

Particolari più piccoli di  $\lambda$  costituiscono oggetti diffrangenti: negli esempi di diffrazione trattati, i massimi erano tanto separati quanto più era piccolo  $d/\lambda$ .

Massimi relativi a particolari distanti  $d$  che diffrangono ( $d/\lambda \lesssim 1$ ) implicano che l'oggetto non può essere risolto (ovvero “visto”).

Esperienza: onde acustiche.

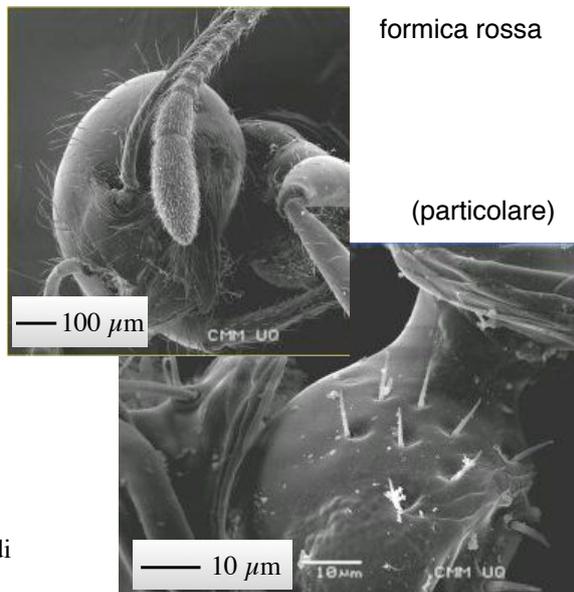
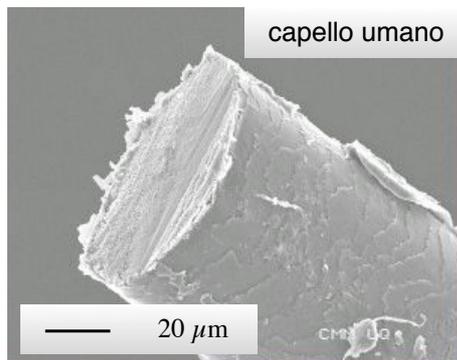
Da un altro punto di vista:

Per un segnale, sussiste il teorema di Nyquist. Un segnale può essere ricostituito esattamente a partire dal campionamento se la frequenza di quest'ultimo è almeno doppia della larghezza di banda del segnale.

Ma per un'onda,  $\lambda$  è il “periodo spaziale”,  $k/2\pi$  la “frequenza spaziale”. Allora un oggetto di dimensioni  $l$  può essere “ricostituito” (ovvero “visto”) se  $k \gtrsim 2 \cdot 2\pi/l$ .

ma...

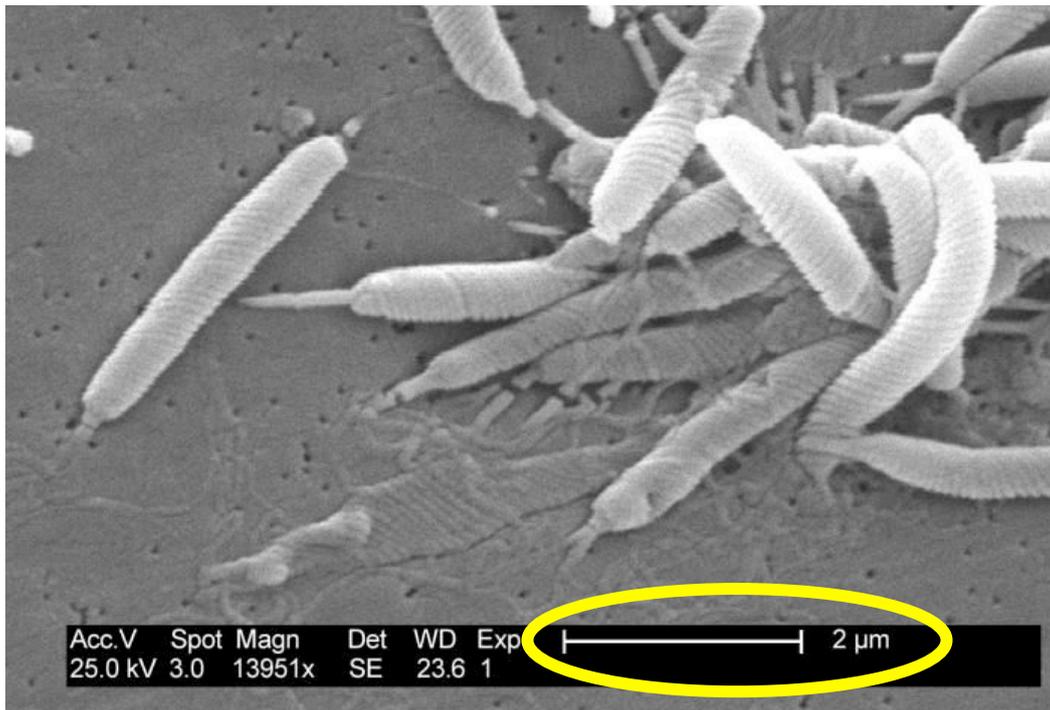
La luce ha natura ondulatoria. Quindi gli effetti di diffrazione impediscono la visione distinta di oggetti più piccoli di  $\sim \lambda = 300 \div 700$  nm.



Che radiazione è stata usata?  
(raggi X?  $\lambda$  adatta, ma sono molto penetranti -vedi radiografie: non vengono riflessi facilmente).

## Helicobacter Pylori

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hpylori.jpg>



## Cosa possiamo “vedere”?

Particolari più piccoli di  $\lambda$  costituiscono oggetti diffrangenti: in tutti gli esempi di diffrazione trattati, i massimi erano tanto separati quanto più era grande  $d/\lambda$ .

Massimi che si sovrappongono ( $d/\lambda$  piccolo) significano che l'oggetto non può essere risolto (ovvero “visto”).

Esperienza: onde acustiche.

Da un altro punto di vista:

Per un segnale, sussiste il teorema di Nyquist. Un segnale può essere ricostituito esattamente a partire dal campionamento se la frequenza di quest'ultimo è almeno doppia della larghezza di banda del segnale.

Ma per un'onda,  $\lambda$  è il “periodo spaziale”,  $k/2\pi$  la “frequenza spaziale”. Allora un oggetto di dimensioni  $l$  può essere “ricostituito” (ovvero “visto”) se  $k \gtrsim 2 \cdot 2\pi/l$ .