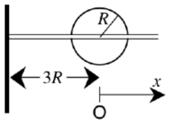
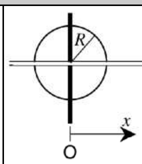


Una sfera di raggio R, uniformemente carica con carica complessiva Q, ha il suo centro a una distanza $3R$ da uno strato piano su cui è distribuita uniformemente carica elettrica con densità superficiale ρ_s, di stesso segno di Q. Una guida tubolare, collocata lungo la congiungente della sfera con lo strato, attraversa la sfera. Una particella dotata di carica $q > 0$ può scorrere senza attrito entro la guida tubolare. In una posizione x_0 (entro la guida) la particella, ivi collocata, resta immobile, mentre spostandola di poco da detta posizione nel verso delle x>0, essa se ne allontana dirigendosi verso il centro della sfera



Una sfera di raggio R, uniformemente carica con carica complessiva Q, ha il suo centro in corrispondenza a uno strato piano su cui è distribuita uniformemente carica elettrica con densità superficiale ρ_s, di segno opposto rispetto a Q. Una guida tubolare, collocata perpendicolarmente allo strato, attraversa la sfera e lo strato (si suppone che i necessari forellini non perturbino le configurazioni di campo elettrico). Una particella dotata di carica $q > 0$ può scorrere senza attrito entro la guida tubolare. In una posizione $x_0 > 0$ (entro la guida) la particella, ivi collocata, resta immobile, mentre spostandola di poco da detta posizione nel verso delle x>0, essa se ne allontana indefinitamente.

Detta x la coordinata lungo la guida (il centro della sfera ha $x = 0$):

1] si determini la coordinata x_0 del punto in cui la particella, ivi collocata, rimane immobile.

2] Si determini il segno di Q e ρ_s, motivando il risultato

3] Si calcoli l'energia cinetica della particella quando transita a distanza R dalla posizione di immobilità.

Esprimere i risultati in formule e solo al termine dare i valori numerici. Dati: $|Q|$, $|\rho_s|$, q, R

Facoltativo: come cambierebbero i risultati se, spostando la particella dalla posizione di immobilità, essa oscillasse attorno a detta posizione?

IMPOSTAZIONE In ambedue i casi l'impostazione della soluzione del problema richiede, per i tre punti:

1] di equilibrare in x_0 i campi dati dalla sfera e dllo strato: $\mathbf{E}_{sf} + \mathbf{E}_{strato} = 0$. Si richiede quindi che i campi siano discordi in x_0;

2] di considerare la direzione di crescita o decrescita dei singoli campi (stabilità);

3] di notare che, essendo l'energia cinetica iniziale nulla (particella ferma), l'energia cinetica finale T deve essere pari alla variazione di energia potenziale:

$$T = q\left[V(x_0) - V(x_0 + R)\right] = q\int_{x_0}^{x_0+R} E_x dx \quad (1)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che il problema è unidimensionale. Attenzione: lungo il percorso da x_0 a $x_0 + R$, E_x potrebbe cambiare forma funzionale.

Poiché l'intensità del campo di una sfera unformemente carica cresce dal centro alla superficie, e poi decresce, mentre il campo dato da uno strato è *uniforme* in tutto un semispazio (non cambia con la distanza), potrebbero esistere *due* posizioni di equilibrio, con $x_0 \neq 0$, una interna e una esterna alla sfera. Si espongono di seguito le soluzioni relative alle due possibili scelte.

Ricordiamo le espressioni dei campi elettrici per uno strato e per una sfera, scrivendo solo la componente x. Questo è rilevante per il segno che ne risulta (notare la funzione x/|x| che fornisce il segno).

Strato piano, alla destra dello strato: $$E_{x,strato}(x) = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \quad (2)$$

Sfera uniformemente carica: $$E_{x,sfera}(x) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2}\dfrac{x}{|x|}, & |x| \geq R \quad (3a) \\ \dfrac{\rho_V}{3\varepsilon_0}x, & |x| \leq R \quad (3b) \end{cases}$$

con $\rho_V = Q/[(4/3)\pi R^3]$

A]: POSIZIONE DI EQUILIBRIO ESTERNA ALLA SFERA Il campo della sfera è dato dalla (3a). Quindi:

Perché i campi siano discordi, si vede immediatamente che è necessario che sia $-3R < x_0 < 0$. Quindi

$\dfrac{\rho_S}{2\varepsilon_0} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x_0^2} = 0$, da cui la soluzione negativa: $x_0 = -\sqrt{\dfrac{Q}{2\pi\rho_S}}$

Spostandosi nel verso positivo delle x il campo della sfera (esternamente alla sfera) aumenta di intensità, pertanto prevale sul campo dello strato che è invece uniforme. Perché la particella con $q > 0$ prosegua verso il centro della sfera deve essere $Q < 0$, e quindi (testo) $\rho_S < 0$.

Per il calcolo di T, bisogna prestare attenzione nell'Equazione (1) a ché il punto a distanza R dalla posizione di immobilità non si trovi entro la sfera: l'espressione $E_{x,sfera}$ cambierebbe attraversando la superficie della sfera. Nel caso in cui $|x_0| > 2R$, si ha:

$$T = q\int_{x_0}^{x_0+R}\left(\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\right)dx = q\frac{\rho_S R}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{x_0}{R}\left(1 - \frac{x_0}{x_0 + R}\right)\right]$$

Avendo usato l'espressione ottenuta sopra per x_0 (attenzione ai segni).

I campi sono discordi ovunque: strato e sfera hanno cariche di segno opposto. Il testo richiede $x_0 > 0$ (va eliminata la soluzione x=0). Quindi

$\dfrac{\rho_S}{2\varepsilon_0} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x_0^2} = 0$, da cui la soluzione positiva: $x_0 = \sqrt{-\dfrac{Q}{2\pi\rho_S}}$

Spostandosi nel verso positivo delle x il campo della sfera (esternamente alla sfera) diminuisce di intensità, pertanto prevale il campo dello strato che è invece uniforme. Essendo $q > 0$, perché la particella si allontani indefinitamente deve essere $\rho_S > 0$, e quindi $Q < 0$.

Per l'energia cinetica si scrive:

$$T = q\int_{x_0}^{x_0+R}\left(\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\right)dx = q\frac{\rho_S R}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x_0}{R}\left(1 - \frac{x_0}{x_0 + R}\right)\right]$$

Avendo usato l'espressione ottenuta sopra per x_0 (attenzione ai segni).

Facoltativo: Non cambierebbero le posizioni di equilibrio, ma cambierebbero tutti i segni delle cariche dello strato e della sfera.

B]: POSIZIONE DI EQUILIBRIO INTERNA ALLA SFERA. Il campo della sfera è dato dalla (3b). Lo schema del ragionamento resta invariato, cambiano le formule di partenza e quindi alcune conseguenze. Schematicamente:

Campi discordi –> $x_0 < 0$. Quindi

$\dfrac{\rho_S}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_V}{3\varepsilon_0}x_0 = 0$, da cui la soluzione negativa: $x_0 = -\dfrac{3\rho_S}{2\rho_V} = -\dfrac{2\pi\rho_S}{Q}R^3$

Seguendo un ragionamento analogo al punto A], il campo della sfera diminuisce di intensità, e quindi $\rho_S > 0$, e quindi (testo) $Q > 0$.

Per il calcolo di T , da x_0 a x_0 +R il percorso resta interno alla sfera , quindi:

$$T = q\int_{x_0}^{x_0+R}\left(\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0}x\right)dx = q\frac{\rho_S R}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{R}{4x_0}\right),$$ usando x_0 sopra ottenuto

In questo caso non si può soddisfare la richiesta di allontanamento indefinito: per avviare il moto (nel verso richiesto) sarebbe necessario avere $Q > 0$ e quindi (testo) $\rho_S < 0$. Tuttavia, all'esterno della sfera l'intensità del campo della sfera stessa diminuirebbe continuamente, e a un certo punto prevarrebbe il campo (uniforme) dello strato, finché ad un certo punto la particella invertirebbe il suo moto ritornando verso l'origine.

Commercializzazione vietata – Proprietà intellettuale non ceduta - Scaricabile liberamente da www.fis.uniroma3.it/~silva