

1 Sviluppi asintotici

Esercizio 1 Dimostrare che la funzione di variabile complessa:

$$F(z) = \int_0^{\infty} dt \frac{\exp(-zt)}{1+t^2}$$

è analitica per $\operatorname{Re} z > 0$. Assumendo z reale ($z = x$), determinare lo sviluppo asintotico di $F(z)$.

Esercizio 2 Dire se sono vere le seguenti stime asintotiche e spiegarne il motivo:

- a) $2 \sinh(\alpha x) \sim \exp(\alpha x)$, $x \rightarrow +\infty$, $\alpha > 0$
- b) $\int_0^{+\infty} dt \frac{\sin(\lambda t)}{(1+t^2)} = O(\lambda^{-1})$, $\lambda \rightarrow \infty$
- c) $\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$

Esercizio 3 Calcolare con il metodo di Laplace il termine dominante dell'andamento asintotico per grandi x dell'integrale:

$$I = \int_0^{\infty} dt \exp[-x(t + a^2/t)]$$

Esercizio 4 Calcolare il termine dominante nello sviluppo asintotico per $\lambda \rightarrow \infty$, dell'integrale:

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda(t^2 - a^2)^2}$$

Esercizio 5 Qual è, per $\lambda \rightarrow +\infty$, il termine dominante dell'integrale:

$$I(\lambda) \int_0^{\infty} dt \frac{e^{\lambda \sin^2(\frac{2t}{\pi})}}{1+t^2}?$$

Esercizio 6 a) Sia

$$F(x) = \int_0^{\infty} dt \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh t}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x .

b) Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi x e t , nella direzione $x/t = \text{cost.} = v$, dell'integrale

$$I(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\exp(ikx - ik^3t)}{\cosh k}$$

Esercizio 7 Calcolare il seguente integrale con un errore inferiore a $\frac{1}{1000}$:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-1000t)}{1+t^3}$$

Esercizio 8 Determinare il termine dominante per grandi x dell'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(ix\phi(t))f(t)$$

con $\phi(t) = t^2 - a^2$, $f(t) = (\cosh t)^{-1}$