CORSO DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA II CORREZIONE COMPITI STUDIO GUIDATO: 7 DICEMBRE 2007

V. ACQUANITI, D. LEVI, AND F. MUSSO

(1) **Quando la trasformazione**

$$x \to x' = \mu x(1-x)$$

é una contrazione? In quale spazio metrico?

Qual'é il suo punto fisso?

SVOLGIMENTO $f(x) = \mu x(1-x)$ é una contrazione se $|f_x(x)| < 1$, i.e. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2|\mu|} > x > \frac{1}{2} - \frac{1}{2|\mu|}$. Quindi lo spazio in cui la trasformazione contrae é $\mathcal{R}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2|\mu|}\,,\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2|\mu|}]$.

Il punto fisso é soluzione dell'equazione $x = f(x)$, i.e. $x = 0$ o $x = \frac{\mu-1}{\mu}$.

(a) $x = 0$ é un punto fisso se $0 \in \mathcal{R}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2|\mu|}\,,\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2|\mu|}]$ i.e. $|\mu| < 1$.

(b) $x = \frac{\mu-1}{\mu}$ é un punto fisso se $\frac{\mu-1}{\mu} \in \mathcal{R}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2|\mu|}\,,\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2|\mu|}]$, i.e se $\mu > 0$ e $1 < \mu < 3$. In questo caso il punto fisso sara' un punto compreso nell'intervallo $0 < x < \frac{2}{3}$.

(2) **Dire per quali valori del parametro reale c le seguenti funzioni sono di modulo quadrato sommabile nell'intervallo indicato:**

(a) $f_1(x) = \frac{\exp(-cx)}{(1-2cx-x^2)^{c/2}}$, $\qquad x \in [0, +\infty)$;

(b) $f_2(x) = \frac{\sinh(cx)\exp(-|x|)}{x^{2c}}$, $\qquad x \in \mathcal{R}$.

SVOLGIMENTO

Una funzione $f(x)$ é di modulo quadrato sommabile nell'intervallo $[a, b]$ se $\int_b^a |f(x)|^2 dx < \infty$. Se $f(x)$ ha un polo x_0 dentro l'intervallo di integrazione, in x_0 si deve avere $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)|f(x)|^2 = 0$. Se l'estremo superiore dell'integrazione b é ∞ allora in $x = b$ si deve avere $\lim_{x\to b} x|f(x)|^2 = 0$.

Tenendo in conto questi risultati andiamo ora a considerare separatamente le funzioni f_1 ed f_2:

(a) Se $c < 0$, $|f_1|^2$ diverge asintoticamente. Per $c > 0$ il denominatore ha sempre un polo in $[0, \infty)$ nel punto $x_+ = -c + \sqrt{c^2 + 1}$. Quindi $f_1 \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ se $0 < c < 1$.

(b) La funzione converge asintoticamente se $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$. Nell'origine ha apparentemente un polo che risulta una singolaritá eliminabile per $c \le \frac{3}{4}$. Quindi $f_2 \in \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ se $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$.

(3) **Dire per quali valori di c la funzione:**

$$f_c(x) = \frac{1}{|x^2 - 4cx + 1|^{c/2}},$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,+\infty]}$.

SVOLGIMENTO

La funzione f_c ha poli negli zeri del polinomio $x^2 - 4cx + 1$, i.e. per $x_\pm = 2c \pm \sqrt{4c^2 - 1}$. I poli non sono sull'asse reale per $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$, ma in questo caso la funzione non é integrabile asintoticamente. La funzione é integrabile asintoticamente per $c > \frac{1}{2}$, ma in questo caso ha due poli nell'intervallo di integrazione dato che $x_\pm > 0$. Analizzando il comportamento della funzione nei poli si ha che $f_c \in \mathcal{L}_2[0,\infty)$ se $\frac{1}{2} < c < 1$.

(4) **Trovare per quali valori del parametro reale c le seguenti funzioni appartengono allo spazio indicato:**

(a) $f_1(x) = \frac{x^c(1-x^2)}{\sin(\pi x)(1-cx)}, \qquad f_1(x) \in \mathcal{L}^2_{[0,1]}$

(b) $f_2(x) = \frac{\sin(\frac{\pi x}{c})\sinh(4x)\ln|\tanh(cx)|}{x^2(c^2-x^2)}, \qquad f_2(x) \in \mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$

SVOLGIMENTO

Consideriarmo separatamente le funzioni f_1 ed f_2:

(a) In questo caso l'intervallo di definizione é finito per cui basta considerare i poli di $|f_1|^2$ in $[0,1]$. f_1 si annulla in $x = 0$, $x = 1/c$ ed $x = 1$. Per $x = 0$ f_1 non é singolare se $c > 1/2$. In $x = 1$ f_1 é singolare se $c = 1$ mentre la singolaritá in $x = 1/c$ non apparterrá all'intervallo d'integrazione se $c < 1$. Quindi $f_1 \in \mathcal{L}_2[0,1]$ se $\frac{1}{2} < c < 1$.

(b) La funzione f_2 non potrá mai appartenere a $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$ dato che il termine dominante della funzione $|f_2|^2$ all'infinito e' dato dalla funzione $\sinh^2(4x)$ che diverge esponenzialmente. Gli altri termini sono oscillanti o convergono polinomialmente.

(5) **Dimostrare l'indipendenza lineare delle funzioni $f_k(x) = \exp(ikx)$, $k = 0,1,2,3$ per $x \in [a,b]$ con $a < b$.**

SVOLGIMENTO

Le 4 funzioni $f_0 = 1$, $f_1 = \exp(ix)$, $f_2 = \exp(2ix)$ e $f_3 = \exp(3ix)$ sono linearmente indipendenti se una qualunque loro combinazione lineare é nulla solo quando i coefficienti son nulli. Scriviamo quindi l'equazione:

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0. \tag{1}$$

Se l'equazione (1) é soddisfatta lo devono anche essere le sue conseguenze differenziali, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1 + 2\alpha_2 f_2 + 3\alpha_3 f_3 &= 0, \\ \alpha_1 f_1 + 4\alpha_2 f_2 + 9\alpha_3 f_3 &= 0, \\ \alpha_1 f_1 + 8\alpha_2 f_2 + 27\alpha_3 f_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di α_i delle 4 equazioni (1, 2) é diverso da zero [é pari a $12\exp(6ix)$] e quindi l'unica soluzione é $\alpha_i = 0$, $i = 0,1,2,3$.

(6) **Data la trasformazione**

$$Ax = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x}\right),$$

vedere quando é una contrazione. Qualé il suo punto fisso?

Calcolare le prime 4 iterazioni per $r = 2$. Qualé' il migliore punto iniziale?

SVOLGIMENTO

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x}\right)$ é una contrazione se $|f_x| < 1$, i.e. se, per $r > 0$ $x > \frac{\sqrt{r}}{3}$ o, per $r < 0$ se $x > \sqrt{-r}$.

Il punto fisso é dato da $x = f(x)$, i.e. $x = \sqrt{r}$ e quindi il punto fisso appartiene allo spazio dove la trasformazione A é una contrazione solo se $r > 0$, i.e. $x > \frac{\sqrt{r}}{3}$.

Risolvendo ora l'iterazione $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r}{x_n}\right)$ con $x_0 > \frac{\sqrt{r}}{3}$, i.e. per $r = 2$ $x_0 = 1$, otteniamo:

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 1.5, \qquad x_2 = 1.416, \qquad x_3 = 1.4142155, \qquad x_4 = 1.4142135$$

N.B. $x_4 = \sqrt{2}$.

Il migliore punto iniziale dell'iterazione é *naturalmente* il punto fisso!