Compiti d'esonero e d'esame di Metodi matematici per la fisica

Trascritti da: Fabio Musso.

II compito d'esonero di MMF del 22/12/?

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = \sin(2t) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} ds\ \sin(t-s)x(s),$$

ricordando che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ds\ \sin(ns)\cos(ms) = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} ds\ \sin(ns)\sin(ms) = \pi\delta_{nm},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} ds\ \cos(ns)\cos(ms) = \pi\delta_{nm}.$$

Esercizio 2 *Data la matrice:*

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

1. *Si dica se è diagonalizzabile e se ne determinino esplicitamente autovalori e autovettori.*
2. *Avendo posto T nella forma:*

   $$T = \mathbb{I} + S(\alpha,\beta,\gamma) := \mathbb{I} + \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3,$$

   si calcolino i commutatori $[S_i, S_j]$ $i,j = 1,2,3$ confrontandoli con quelli degli operatori Q, P, I definiti come:

   $$(Qf)(x) = xf(x); \qquad (Pf)(x) = \frac{df}{dx}; \qquad (If)(x) = f(x); \qquad \forall f \in C^{\infty}_{[a,b]}.$$

3. *Si determini $A(\alpha,\beta,\gamma) = \exp[tS(\alpha,\beta,\gamma)]$, dimostrando che: $A(\alpha,\beta,\gamma) = T(\alpha t, \beta t + \frac{1}{2}t^2\alpha\gamma, \gamma t)$.*
4. *Si verifichi che $\mathrm{Im}\, S \oplus \mathrm{Ker}\, S^t = \mathbb{R}^3$.*

Esercizio 3 *Si consideri in l^2 l'operatore:*

$$A : \underline{x} \to \underline{y}; \quad y_n = \alpha^n x_n + \frac{1}{n} x_{n+1}, \qquad |\alpha| < 1.$$

1. *Si dimostri che $\lambda_k = \alpha^k$, $k = 1, 2, \dots$ sono autovalori di A e che i corrispondenti autovettori si scrivono nella forma: $\underline{x}^{(\lambda_k)} = \sum_{j=1}^{k} c_{kj} \underline{e}^{(j)}$ (non è necessario calcolare esplicitamente i coefficienti c_{kj}) e quindi costituiscono una base in l^2 (perché?).*

2. *Si provi che $\lambda = 0$ appartiene allo spettro di A.*

I compito d'esonero di MMF del ?

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere con il metodo delle approssimazioni successive l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^1 ds\,(t-s)x(s).$$

(Si consiglia di porre $\lambda = -\mu^2$).

Esercizio 2 *La matrice A agisce sui vettori della bade canonica $e^{(i)}$ secondo la legge:*

$$\begin{aligned} Ae^{(1)} &= e^{(1)} \\ Ae^{(2)} &= e^{(1)} + 2e^{(2)} \\ Ae^{(3)} &= e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} \end{aligned}$$

Trovare autovalori e autovettori di A e scriverne la decomposizione spettrale.

Esercizio 3 *Data l'equazione differenziale matriciale:*

$$\dot{X} = [A, X], \qquad A = \omega\sigma_1, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

con la condizione iniziale $x(0) = \sigma_3$, determinare, ad ogni t, le componenti del vettore $\vec{x}(t)$ definito dalla relazione:

$$X(t) = \vec{x}(t) \cdot \hat{\sigma}$$

Esercizio 4 *Trovare massimo e minimo della funzione delle due variabili complesse x ed y definita da:*

$$F(x,y) = \frac{|x|^2 + 4\mathrm{Re}(\bar{x}y) + 8\mathrm{Im}(\bar{x}y) + 4|y|^2}{|x|^2 + |y|^2}$$

Dire anche a quali valori di x e y essi corrispondono.

?

?

Esercizio 1 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore:*

$$A = i\frac{d}{dx} + x$$

definito sulla varietà lineare $V(A)$ *delle funzioni appartenenti a* $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$*, insieme alle loro derivate prime, e tali che* $f(-\pi) = f(\pi)$*.*

Esercizio 2 *Determinare il risolvente* $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ *dell'operatore* A *definito nell'esercizio* 1*, nei due modi seguenti:*

1. *mediante la decomposizione spettrale;*
2. *risolvendo in* $V(A)$ *l'equazione differenziale:*

$$(A - \lambda)\mathcal{G}(x; y) = \delta(x - y).$$

(Facoltativo) Utilizzare il risultato per calcolare la serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \lambda^2}.$$

Esercizio 3 *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^N$*, risolvere l'equazione differenziale:*

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x}; \qquad \underline{x}(0) = \underline{u},$$

dove $\underline{u}$ *è un vettore assegnato di norma* 1*, e* A *è la matrice:*

$$\mathbb{I} + P_{\underline{u}} \equiv \mathbb{I} + |u\rangle\langle u|.$$

Esercizio 4 *Passando alla trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integro–differenziale:*

$$f'(x) = x + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-|x-y|} f(y).$$

Alternativamente, si cerchi la soluzione usando l'"Ansatz":

$$f(x) = A + BX.$$

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[-1, 1]$*, la funzione:*

$$f(x) = |x|,$$

e utilizzare il risultato per verificare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 6 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$x^2 f''(x) - f(x) = \delta(x^2 - 1).$$

Suggerimento: si cerchi la soluzione dell'omogenea nella forma x^{α}*.*

?

?

Esercizio 1 *Sia* $\{\underline{e}^{(i)}\}$ *una base ortonormale in* $\mathbb{E}^3$. *Per quali valori di* α, β, γ *l'operatore* U *definito come:*

$$\begin{aligned} Ue^{(1)} &= \alpha \underline{e}^{(2)} + \underline{e}^{(3)} \\ U\underline{e}^{(2)} &= \beta \underline{e}^{(3)} + \underline{e}^{(1)} \\ U\underline{e}^{(3)} &= \gamma \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}. \end{aligned}$$

è unitario ed ha uno degli autovalori uguale ad uno?

Determinare l'autovettore associato al suddetto autovalore.

Esercizio 2 *Data la matrice* $(N+1) \times (N+1)$*:*

$$A = \begin{pmatrix} (a,b) & \vdots & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \vdots & & & & \\ b_2 & \vdots & & C_{ij} = b_i a_j & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ b_n & \vdots & & & & \end{pmatrix}, \qquad (a,b) = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i,$$

determinare $\mathrm{Im}\, A$ *e* $\mathrm{Ker}\, A^t$.

Esercizio 3 *Ogni matrice* $(N+1) \times (N+1)$ *può essere scritta (cfr. l'esercizio precedente) come somma di una matrice del tipo*

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & \hat{X}_{N\times N} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

e una matrice del tipo:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & \vdots & & & & \\ z_2 & \vdots & & 0_{N\times N} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ z_N & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Dimostrare che:

1. *il commutatore di due matrici del tipo X o del tipo Y è una matrice del tipo X;*

2. *il commutatore di una matrice del tipo X e di una matrice del tipo Y è una matrice del tipo Y.*

Esercizio 4 *Supponiamo che A sia una matrice $N\times N$ dotata della rappresentazione spettrale:*

$$A = \sum_{k=1}^{N} \left(n - \frac{1}{2}\right) P^{(n)} \qquad (P^{(n)}P^{(m)} = \delta_{nm}P^{(n)}; \quad \sum_{n=1}^{N} P^{(n)} = \mathbb{I}).$$

Calcolare $\det \exp(zA)$ *e* $\mathrm{Tr} \exp(zA)$.

Studiare le proprietà di analiticità della successione di funzioni:

$$f^{(N)}(z) = \mathrm{Tr}\, \exp(zA)$$

e determinare il dominio del piano complesso in cui la successione è (assolutamente) convergente, indicandone anche il limite.

Esercizio 5 *Il vettore $\vec{J} \in \mathbb{E}^3$ precede sotto l'azione di un campo esterno (uniforme) $\vec{H}$ secondo la ben nota equazione:*

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \lambda \vec{H} \wedge \vec{J}.$$

Risolvere la precedente equazione differenziale, con la condizione iniziale $\vec{J}_0 = j_0 \underline{e}^{(1)}$. Si ricordi che ogni matrice 2×2 a traccia nulla si può rappresentare nella forma:

$$A = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 := \vec{a}\cdot\hat{\sigma}$$

e che, in questa rappresentazione, si ha:

$$[A, B] = 2i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \hat{\sigma}.$$

Esercitazione di MMF del 16/03/82

?

Esercizio 1 *Calcolare lo sviluppo in serie di potenze della funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{16z^4 + 1}$$

nell'intorno di $z_0 = 0$ *e determinarne il raggio di convergenza.*

Calcolare i seguenti integrali di $f(z)$*:*

1. $\oint_{C_1} dz f(z)$ $\qquad$ C_1 *circonferenza di centro* $z_0 = -i$ *e raggio* $R = 2$*;*
2. $\oint_{C_2} dz f(z)$ $\qquad$ C_2 *circonferenza di centro* $z_0 = -i$ *e raggio* $R = 1$*.*

Esercizio 2 *Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di* $z_0 = 1$ *della funzione:*

$$f(z) = \frac{z \sin(z\pi/2)}{z - 1}.$$

Dire in quale regione del piano complesso lo sviluppo converge e calcolare l'integrale:

$$\oint_C dz f(z),$$

essendo C *la circonferenza di centro* $z_0 = 1$ *e raggio* $R = 2$*.*

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \oint_C dz\, w(z)$$

con C *circonferenza di centro* $z_0 = 0$ *e raggio* $R = 1$ *e* $w(z)$ *la funzione:*

$$w(z) = \sum_{m=-2}^{2} (-1)^m z^m \sum_{n=-2}^{2} n^2 z^n.$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^2\theta}{2 + \sin\theta}.$$

Esercitazione di MMF del 23/04/82

?

Esercizio 1 *Calcolare autovalori e autovettori della matrice $B = A^2 - \mathbb{I}$, essendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 *Determinare la matrice A nella base ortonormale $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$, sapendo che A è hermitiana a traccia nulla, e che:*

$$\begin{aligned} Av^{(1)} &= v^{(2)} + v^{(3)} \\ Av^{(2)} &= v^{(1)} + v^{(3)} \end{aligned}$$

Esercizio 3 *Trovare autovalori e autovettori della matrica A del precedente esercizio.*

Esercizio 4 *Trovare l'inversa della matrice $B = \mathbb{I}+2P$, essendo P una matrice di proiezione ($P^2 = P$). E' necessario specificare il rango della matrice B?*

Esercizio 5 *Dimostrare che, se A e B sono due matrici hermitiane a traccia nulla, il loro prodotto, in termini delle matrici di Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, può scriversi nella forma:*

$$AB = \vec{a} \cdot \vec{b}\, \mathbb{I} + i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \hat{\sigma},$$

essendo $\vec{a}, \vec{b}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Come devono essere i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ affinchè le due matrici A, B commutino?

Esercitazione di MMF del 05/05/82

?

Esercizio 1 *Per quali valori della variabile complessa z la successione*

$$x_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)\,, \qquad A = z\sigma_1 + i\sigma_3,$$

appartiene a l^2*?*

Esercizio 2 *Ortonormalizzare le funzioni*

$$\cos^2 x, \qquad \sin^2 x, \qquad 1,$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 3 *Scrivere lo sviluppo di Fourier di* xe^x *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$. *Confrontare il risultato con gli sviluppi di* x *ed* e^x *nello stesso intervallo e stabilire la relazione che li connette.*

Esercizio 4 *Risolvere il problema agli autovalori:*

$$if'(x) = \lambda f(x),$$

con la condizione al contorno $f(-\pi) = f(\pi)$.

Esercizio 5 *Ortonormalizzare le funzioni* x, x^2, x^3 *nell'intervallo* $[-1, 1]$.

Esercizio 6 *Determinare la norma del funzionale* $f : l^2 \to \mathbb{C}$ *definito da:*

$$f\left(\underline{e}^{(k)}\right) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

(Si ricordi che $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)|$*).*

Esercitazione di MMF del 13/05/82

?

Esercizio 1 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x^2+1}.$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Fourier nella regione* $[-\pi, \pi]$ *la funzione:*

$$f(x) = \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Scrivere la relazione di Parceval.

Esercizio 3 *Si consideri l'operatore differenziale:*

$$A = i\frac{d}{dx} + e^x,$$

definito sulle funzioni $f \in \mathcal{L}^2_{[0,1]}$ *tali che* $f(0) = f(1)$. *Trovare una base ortonormale in cui* A *è diagonale.*

Esercizio 4 *Siano* $v(z)$ *e* $w(z)$ *i due vettori di* l^2 *le cui componenti sono, rispettivamente,*

$$v_n(x) = z^{-n}, \qquad w_n(x) = (1+z)^n.$$

Per quali valori di z *esiste*

$$f(z) = \mathrm{Tr}\left[v(z)v^\dagger(z) + w(z)w^\dagger(z)\right]?$$

Esercizio 5 *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni sviluppabili in serie di Fourier in* $[-\pi, \pi]$ *i cui sviluppi siano dati da:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \sin(nx);$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Calcolare il prodotto scalare:

$$(f, g') = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^*(x) \frac{dg}{dx}(x).$$

Esercizio 6 *Per quali valori di c la funzione*

$$\frac{e^{-x}\sin(cx)}{x+c}$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,\infty]}$*?*

Compito di MMF del 12/04/83

A.Degasperis,O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale:*

$$-f''(x) + g\delta(x-a)f(x) = k^2 f(x)$$

caratterizzata dal comportamento asintotico:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \sin(kx) = 0.$$

Esercizio 2 *Data la matrice* 2×2*:*

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{n}\cdot\hat{\sigma}\right), \qquad \vec{n}\cdot\vec{n} = 1,$$

determinare la soluzione (matriciale!) X *dell'equazione algebrica:*

$$X + A + \frac{1}{2}XA = 0.$$

Esercizio 3 *Dire per quali valori del parametro reale c le seguenti funzioni sono di modulo quadrato sommabile nell'intervallo indicato:*

1. $f(x) = \dfrac{\exp(-cx)}{(1-2cx-x^2)^{\frac{c}{2}}}, \qquad x \in [0, +\infty)$;
2. $f(x) = \dfrac{\sinh(cx)\exp(-|x|)}{x^{2c}}, \qquad x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[0,1]$*, la funzione:*

$$f(x) = x(1-x).$$

Utilizzare il risultato per calcolare la somma della serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Esercizio 5 *Determinare la regione del piano complesso in cui converge lo sviluppo in serie di Laurent intorno a $z = 0$ della funzione:*

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) .$$

Calcolare il coefficiente c_{-1} di questo sviluppo.

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x^2-1)(x^2+1)} .$$

Compito di MMF del 19/06/84

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

nella regione $|z| > 2$.

Esercizio 2 *Dire se la funzione:*

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-|t|}}{t - z}$$

è analitica per $z \notin \mathbb{R}$ *e calcolarne la discontinuità sull'asse reale*

$$\Delta\phi = \lim_{\epsilon \to 0} \phi(t + i\epsilon) - \phi(t - i\epsilon), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *Sia* A *una matrice diagonalizzabile e* $f(z)$ *una funzione intera. Dire come bisogna scegliere la curva chiusa* C *affinché valga l'identità:*

$$f(A) = \oint_C d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta \mathbb{I} - A}.$$

Esercizio 4 *Data la successione di funzionali lineari:*

$$f_n(x) = x_n + \frac{1}{n} x_{n+1},$$

calcolare le norme $||f_n||$ *nei seguenti casi:*

1. $||x|| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$;
2. $||x|| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$;
3. $||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Determinare, nei tre casi, il limite: $\lim_{n\to\infty} ||f_n||$.

Esercizio 5 *Dimostrare che, prendendo come spazio di funzioni di prova* S_∞*, la successione di funzionali lineari:*

$$\theta_n(x) = \left(e^{-nx} + 1\right)^{-1}$$

converge alla distribuzione $\theta(x)$.

Esercizio 6 *Risolvere l'equazione integrale (si ricordino le proprietà del prodotto di convoluzione)*

$$\frac{1}{x^2+1} = P\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}.$$

Compito di MMF del 10/09/84

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}.$$

Esercizio 2 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2},$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| > 2$;
2. $|z| < 1$;
3. $1 < |z| < 2$.

Esercizio 3 *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$$

e A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esiste la matrice $f(A)$? Perché?

Esercizio 4 *Data la successione di funzionali lineari in l^1:*

$$f_n(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} x_k,$$

dire se la successione numerica $\{||f_n||\}_{n=1}^{\infty}$ converge, e, in caso affermativo, calcolarne il limite.

Esercizio 5 *Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione:*

$$P\left(\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Compito di MMF del 03/12/84

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k,a) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(k\theta)}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}, \qquad 0 < a < 1,\ k \geq 0.$$

Esercizio 2 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \sqrt{z}\tan z.$$

Esercizio 3 *Sia A la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scrivere esplicitamente la funzione di matrice:

$$B(\lambda) = \left[\sin(\pi A - \lambda \mathbb{I})\right]^{-1}$$

Per quali valori della variabile complessa λ $B(\lambda)$ non è definita?

Quanto vale

$$\oint_C d\lambda B(\lambda)$$

se C è la circonferenza del piano complesso λ avente centro nell'origine e raggio $\pi/2$?

Esercizio 4 *Sullo spazio delle successioni di numeri reali, dotate della norma: $||x|| = \max_k |x_k|$, si consideri l'operatore:*

$$A : x_k \to y_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha^{k-l} x_l.$$

Per quali valori di α A è una contrazione?

Esercizio 5 *Si calcoli il limite per $n \to \infty$ nel senso delle distribuzioni delle seguenti successioni di funzioni:*

1. $f_n(x) = e^{-nx}$,
2. $f_n(x) = ne^{-nx}$,
3. $f_n(x) = e^{-x/n}$.

Come spazio di funzioni di prova si prenda $\mathcal{L}^1_{[0,\infty]}$

Compito di esonero di MMF del 01/02/85

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$$

sviluppparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| < 2$;
2. $|z| > 2$;
3. $1 < |z - 3| < 5$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I_n = \int_0^{\pi} dx \frac{\cos(nx)}{1 + a^2 - 2a\cos x}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 - 1)}$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^{px}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}; 0 < \alpha < p.$$

Esercizio 5 *Determinare il dominio di analiticità della funzione definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(z) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{tz}}{t^2 + 1}.$$

Esercizio 6 *Discutere le proprietà di analiticità della funzione:*

$$f(z) = \mathrm{Tr}(e^{-zH}),$$

dove H è l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico quantistico, di autovalori

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 7 *Calcolare l'integrale:*

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^3}{2z^4 + 5z^3 + 27},$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R, centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.

Compito di MMF del 13/09/85

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{(\beta + e^x)(1 + e^{-x})}, \qquad \beta < 0.$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}$$

nella regione $1 < |z| < 3$.

Esercizio 3 *Sia* P *un proiettore hermitiano unidimensionale:*

$$P = P^\dagger, \qquad P^2 = P, \qquad \mathrm{Tr} P = 1.$$

Determinare in qulae regione del piano complesso λ *converge la successione di matrici:*

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} (\lambda P)^n,$$

e stabilirne il limite, secondo la norma $||A||^2 = \mathrm{Tr}(A^\dagger A)$.

Esercizio 4 *Si calcolino autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$D = \frac{d}{dx}$$

nello spazio delle funzioni assolutamente continue tali che $f(-\pi) = f(\pi)$. *Si dimostri poi che* $\mathrm{Tr}(\exp(tD)) = 2\pi\delta(t)$.

Esercizio 5 *La trasformata di Hilbert di una funzione è definita nel modo seguente:*

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x - y}.$$

Dimostrare la proprietà $H^2 = -\mathbb{I}$ *(cioè:* $(H^2 f)(x) = (H(Hf))(x) = -f(x)$*).*

Suggerimento: si passi alla trasformata di Fourier, sfruttando l'unicità della trasformata e ricordando che $\mathcal{F}(P) = i\pi \mathrm{sgn}\, k$.

Compito di MMF del 03/12/85

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-4)}$$

nella regione $2 < |z| < 4$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{ae^x + be^{-x}},$$

con a *e* b *reali positivi.*

Esercizio 3 *Risolvere l'equazione differenziale matriciale:*

$$\frac{dX}{dt} = \{\sigma_3, X\}$$

con la condizione iniziale $x(0) = \sigma_1$.

Esercizio 4 *Si consideri su* l^2 *la successione di operatori*

$$A_n(e^{(k)}) = \frac{1}{n} e^{(k)} + e^{(k+1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1. *Dimostrare che* $||A_n|| \leq \sqrt{2}\ \forall n$.
2. *Calcolare il limite (forte) della successione* A_n.

Esercizio 5 *Calcolare, nel senso delle distribuzioni, la somma della serie:*

$$S(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n e^{in\theta}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi],$$

sullo spazio delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier insieme alle loro derivate prime e tali che $f(\pi) = f(-\pi)$.

Esercizio 6 *Usando le proprietà della trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione, risolvere l'equazione integrale:*

$$xf(x) = \alpha P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}; \qquad \alpha > 0.$$

Compito di esonero di MMF del 20/12/85

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Trovare massimo e minimo della funzione:*

$$F(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) + 3z^2 + 2\sqrt{2}yz$$

sulla sfera di raggio 2.

Esercizio 2 *Risolvere l'equazione differenziale matriciale:*

$$\dot{X} = \sigma_+ X + X\sigma_-, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con la condizione iniziale:

$$X(0) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 *A che cosa converge (nel senso delle distribuzioni) la successione:*

$$f_n(x) = \frac{1}{\alpha e^{nx} + 1}, \qquad \alpha > 0$$

per $n \to \infty$*?*

Esercizio 4 *Risolvere, col metodo della funzione di Green, l'equazione differenziale:*

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 f'(x)\right) = x, \qquad f(1) = f(2) = 0.$$

Esercizio 5 *Dimostrare che la distribuzione:*

$$D(x) = a\theta(x) + b \ln |x|$$

con a *e* b *costanti arbitrarie, è soluzione dell'equazione differenziale:*

$$\frac{d}{dx}\left(xD'(x)\right) = 0.$$

Esercizio 6 *Sviluppare in polinomi di Hermite la funzione:*

$$f(x) = e^x.$$

III Compito di esonero di MMF del 03/02/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$ *la funzione*

$$f(x) = \theta(1 - x^2);$$

utilizzare lo sviluppo ottenuto per calcolare la somma della serie:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

(Si è posto per comodità $\sin 0/0 = 1$*).*

Esercizio 2 *Si consideri la funzione* $f(x) = e^{-|x|}$*. Tenendo presente che le sue derivate prime e seconde (nel senso delle distribuzioni) valgono rispettivamente:*

$$f'(x) = -\mathrm{sgn}x\, e^{-|x|}$$
$$f''(x) = e^{-|x|} - 2\delta(x)$$

Si calcolino, in entrambi i modi possibili, le trasformate di Fourier di $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *e si confrontino i risultati.*

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{1 + a\cos(n\theta)}, \qquad 0 < a < 1$$

Esercizio 4 *Data la funzione*

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right):$$

1. *se ne individuino e classifichino le singolarità (tenendo conto anche del punto all'infinito);*

2. *se ne determini lo sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di* $z = 0$*;*

3. *se ne calcoli il residuo all'infinito.*

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^3 + 1}$$

Esercizio 6 *Si calcoli a scelta uno dei seguenti tre integrali:*

1. $\displaystyle\int_a^{\infty} dx \frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{x^2+2}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^4+1}$;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{e^{\alpha x}}{\cosh(\beta x)}, \qquad \beta > \alpha > 0.$

Compito di MMF del 08/04/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *In l^2 (reale) si consideri la successione di funzionali lineari dati da:*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^l x_l \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri:

1. *Per $\alpha < 1$ $\{f^{(n)}\}$ converge in norma a $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^l x_l$; si calcoli $||f||$.*
2. *per $\alpha \geq 1$ la successione $\{f^{(n)}\}$ diverge in norma.*

Esercizio 2 *Si dimostri che l'operatore $D = d/dt$ non è limitato in $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$.*

Suggerimento: si consideri la successione di funzioni: $x^{(k)}(t) = \sin(kt)/kt$, si applichi D e...

Esercizio 3 *Si calcoli il limite, nel senso delle distribuzioni, della successione:*

$$f_n(t) = \frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}.$$

(Come spazio di funzioni di prova, si prenda ad esempio l'insieme delle funzioni in $\mathcal{L}^1_{[-\infty,+\infty]}$ e continue in $t = 0$ insieme alle loro derivate prime).

Quanto vale $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k)$*? (facoltativo)*

Esercizio 4 *Data la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a^* & -1 & 0 \\ -b^* & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

si verifichi che:

Mutilo...

Compito di MMF del 17/06/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ay}}{\cosh y} dy; \qquad 0 < a < 1.$$

Esercizio 2 *Data la funzione di variabile complessa:*

$$f(z) = e^{-z} \mathrm{Tr}\left((z - H)^{-1}\right),$$

dove H è l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico quantistico, di autovalori

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

si determini:

$$I_N = \oint_{C_N} f(z) dz,$$

dove C_N è il cerchio di raggio N (N intero positivo).

Esercizio 3 *Data, in $\mathbb{R}^{n+1}$ la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} (u,v) & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

con $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ $i,j = 1, \dots, n$, e (u,v) l'ordinario prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Si determinino $\mathrm{Im}\, A$ e $\mathrm{Ker}\, A^\dagger$ e si verichi $\mathbb{R}^{n+1} = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^\dagger$.

Esercizio 4 *Determinare la somma, nel senso delle distribuzioni, della serie:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\theta),$$

dove lo spazio delle funzioni di prova è l'insieme delle funzioni $C^\infty_{[-\pi,\pi]}$ che soddisfano condizioni periodiche agli estremi insieme a tutte le loro derivate.

Esercizio 5 *Usando la trasformata di Fourier, si determini una soluzione particolare dell'equazione differenziale:*

$$f''(x) - a^2 f(x) = \delta'(x-b)$$

Esercizio 6 *Si consideri, nello spazio* $C_{[0,1]}$, $||x|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$, *l'operatore integrale non lineare:*

$$(Kx)(t) = \lambda \int_0^t ds\, \sin[x(s)].$$

Si verifichi che K *è una contrazione se* $|\lambda| < 1$. *In tal caso, qual è l'unica soluzione di* $x = Kx$*?*

Compito di MMF del 09/09/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^3+1}$$

Esercizio 2 *Si confrontino tra loro le due funzioni:*

$$\begin{aligned} G(z;x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi x}}{z - ik\pi} \quad , \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}. \\ F(z;x) &= e^z x \coth z \end{aligned}$$

Quanto vale la loro differenza?

Esercizio 3 *In* $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$ *si consideri la varietà lineare* V *delle funzioni tali che* $f(-1) = f(1)$. *Su tale varietà si prenda l'operatore* $D = d/dx$.

1. *Si determini* $\mathrm{Ker}(D + \mathbb{I})$.
2. *Dato* $U = (\mathbb{I} - D)(\mathbb{I} + D)^{-1}$ *si mostri che è unitario e se ne calcolino gli autovalori.*

Esercizio 4 *Sia* $X(t)$ *una matrice dipendente dal parametro reale* t, *supposta invertibile per* $t \in [a,b]$.

1. *Si dimostri che:*
$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}.$$
2. *Si risolva quindi l'equazione differenziale:*
$$\frac{dX}{dt} = \alpha X^2$$
con X *matrice* 2×2 *tale che* $X(0) = \sigma_3$.

Compito di MMF del 09/09/86

G.de Franceschi

Esercizio 1 *Determinare il più grande insieme (aperto) A del piano z in cui è olomorfa la funzione*

$$h(z) = \ln[z(1-z)],$$

considerando la determinazione principale del logaritmo.

Determinare, poi, in A, posizione e tipo delle singolarità di

$$f(z) = \frac{h(z)}{\sin^2_(i\pi z)}.$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2(kx)}{(x^2-1)(x^2+1)}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo finito dimensionale, su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e indichiamo con $(\cdot,\cdot)$ il suo prodotto scalare. In $\mathbb{F} = \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ si consideri il prodotto scalare*

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}\left(X^\dagger Y\right), \qquad X, Y \in \mathbb{F},$$

e l'operatore lineare:

$$D_A X = \{A, X\} = AX + XA,$$

con $A \in \mathbb{F}$ fissato.

Mostrare che D_A è autoaggiunto se e solo se $A^\dagger = A$, e che se $\{e_i\}$ è una base ortonormale (in $\mathbb{E}$) di autovettori di A, una base ortonormale (in $\mathbb{F}$) di autovettori di D_A è data dalle diadi D_{ij} definite da $D_{ij}(u) = e_i(e_j, u)$, $\forall u \in \mathbb{E}$.

Esercizio 4 *Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ la funzione:*

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{|x^2 - 4\lambda x + 1|^{\frac{\lambda}{2}}}$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,+\infty]}$.

Esercizio 5 *Nello spazio lineare $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ delle funzioni complesse continue definite nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, sia*

$$(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-s)x(s)ds.$$

Determinare autovalori e autofunzioni di A. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione:

$$Ax - \lambda x = y$$

ha soluzione $\forall y \in \mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ e calcolarla.

Compito di MMF del 09/09/86

Bernardini

Esercizio 1 *La funzione $f(z)$ ha un polo del terzo ordine all'infinito, due soli zeri di uguale molteplicità in $z = \pm i$, e un polo semplice con residuo 1 nell'origine. Calcolare*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{f(x)}.$$

Esercizio 2 *La trasformazione $z \to w$ è del tipo bilineare di Moebius. Su quale curva del piano z avviene che $|dw| = |dz|$?*

Esercizio 3 *L e M sono due matrici hermitiane 3×3 commutanti. Sappiamo che gli autovettori $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ di L e M sono univocamente determinati e che i corrispondenti autovalori di L^2 e M^2 sono, rispettivamente, $l^2, l^2, \lambda^2 \neq l^2$ e $m^2, m^2, \mu^2 \neq m^2$. Quali sono le possibili terne di autovalori di L e M per cui questo accade?*

Esercizio 4 *Se $A = \vec{v} \cdot \hat{\sigma}$ (dove $\vec{v}$ è un vettore reale di modulo v e $\hat{\sigma}$ il vettore di Pauli) e $F(x) = x \ln(1 + x)$, determinare $\alpha(v)$ e $\beta(v)$ tali che*

$$F(A) = \alpha(v)\mathbb{I} + \beta(v)\vec{v} \cdot \sigma.$$

Esercizio 5 *Determinare gli autovalori dell'equazione*

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} F(ts)x(s)ds,$$

sapendo che $F(u) = k_1$ per $u > 0$, $F(u) = k_2$ per $u < 0$.

Esercizio 6 *Determinare la funzione di Green per l'operatore*

$$\frac{d^2}{dt^2} - 1$$

con le condizioni al contorno $x(a) = x(-a) = 0$.

Compito di esonero di MMF del 10/11/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos(2\theta)}{a - \sin^2\theta}, \qquad a > 1.$$

Esercizio 2 *Data la funzione:*

$$f(z) = \frac{z - i}{z(z + i)}$$

scriverne lo sviluppo in serie di potenze nell'intorno dei punti:

1. $z_0 = 0$;
2. $z_0 = -i$;
3. $z_0 = -i/2$.

Specificare in tutti e tre i casi il dominio di convergenza.

Esercizio 3 *La funzione $f(z)$ ha un polo del primo ordine all'infinito, dove si ha:*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1;$$

essa inoltre vale 0 *nell'origine e non ha altre singolarità ad eccezione dei punti $z_1 = i$, $z_2 = -i$, dove ha due poli semplici con residui $r_1 = 2$, $r_2 = -2$. Determinare $f(z)$.*

Esercizio 4 *Calcolare a scelta due degli integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(ax)}{\cosh(bx)}$;
2. $\displaystyle P\int_{0}^{\infty} dx \frac{\cos(ax)}{b^2 - x^2}$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} dx \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$.

Compito di MMF del 09/12/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^3 - a^3}, \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che:*

1. *è analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = 1,\ z_2 = -1$ in cui ha poli semplici con residui $r_1 = 1/2,\ r_2 = -1/2$;*
2. *vale* $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$*;*
3. $f(0) = 0$.

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z}$$

nelle regioni:

1. $0 < |z| < 3$,
2. $|z - 3/2| < 3/2$,
3. $|z| > 3$.

Esercizio 4 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. *determinarne autovalori e autovettori, mostrando che questi ultimi non formano una base in $\mathbb{R}^3$;*
2. *mostrare che una base in $\mathbb{R}^3$ è invece fornita dall'insieme degli autovettori di A e di uno dei vettori appartenenti a* $\operatorname{Ker} A^2$*;*

3. *verificare che* $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^\dagger$.

Esercizio 5 *Data la successione di funzionali lineari su* $C_{[-1,1]}$

$$f^{(n)}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, g^{(n)}(t)x(t); \qquad g^{(n)}(t) = \begin{cases} -1 & t < -1/n \\ nt & t \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$$

mostrare che essa converge, nella norma naturale su $C^*_{[-1,1]}$*, al funzionale*

$$\bar{f}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, \operatorname{sgn}(t)x(t).$$

Esercizio 6 1. *Dimostrare che nello spazio euclideo delle matrici* $N \times N$ *a elementi complessi* $\mathbb{C}^{N^2}$*, munito del prodotto scalare*

$$(X, Y) = \operatorname{Tr}(X^\dagger Y)$$

l'operatore lineare $\mathcal{A}$ *definito dalla relazione:*

$$\mathcal{A} : X \to Y = [A, X]$$

con A *matrice* $N \times N$*, è hermitiano se* A *è hermitiana.*

2. *Se ne trovino autovalori e "automatrici" nel caso* $N = 2, A = \sigma_3$*, utilizzando la base delle matrici di Pauli.*

Esercizio 7 *Si consideri l'operatore*

$$D^2 \frac{d^2}{dt^2}$$

sulla varietà lineare (densa in $\mathcal{L}^2_{[0,L]}$*) costituita dalle funzioni la cui derivata seconda appartiene a* $\mathcal{L}^2_{[0,L]}$*, che soddisfano le condizioni al contorno:* $x(0) = x(L) = 0$.

1. *Se ne calcolino gli autovalori.*

2. *Si dimostri che il suo inverso è dato dall'operatore integrale:*

$$(Kx)(t) = \int_0^L ds\, K(t,s)x(s); \qquad K(t,s) = \begin{cases} 1/Lt(L-s); & 0 \le s \le t \\ 1/Ls(L-t); & t \le s \le L \end{cases}$$

3. *Utilizzando il fatto che:*

$$\operatorname{Tr}(K) = \int_0^L dt K(t,t)$$

determinare la somma della serie numerica $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

II esonero di MMF del 22/12/86

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. *determinarne autovalori e autovettori, mostrando che questi ultimi non formano una base in* $\mathbb{R}^3$*;*
2. *mostrare che una base in* $\mathbb{R}^3$ *è invece fornita dall'insieme degli autovettori di* A *e di uno dei vettori appartenenti a* $\operatorname{Ker} A^2$*;*
3. *dire come deve essere fatto un vettore* y *tale che l'equazione* $y = Ax$ *ammetta soluzioni.*

Esercizio 2

1. *Sia* A *una matrice hermitiana a traccia nulla. Dimostrare che* $U = \exp(iA)$ *è una matrice unitaria a determinante* 1*;*
2. *sia ora*

$$A = \begin{pmatrix} a & \rho e^{i\theta} \\ \rho e^{-i\theta} & -a \end{pmatrix};$$

la si diagonalizzi e si scriva esplicitamente U*.*

Esercizio 3 *Dimostrare che nello spazio euclideo delle matrici* $N \times N$ *a elementi complessi* $\mathbb{C}^{N^2}$*, munito del prodotto scalare*

$$(X, Y) = \operatorname{Tr}(X^\dagger Y)$$

l'operatore lineare $\mathcal{A}$ *definito dalla relazione:*

$$\mathcal{A} : X \to Y = [A, X]$$

con A *matrice* $N \times N$*, è hermitiano se* A *è hermitiana.*

Esercizio 4 *Data la successione di funzionali lineari su $C_{[-1,1]}$*

$$f^{(n)}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, g^{(n)}(t)x(t); \qquad g^{(n)}(t) = \begin{cases} -1 & t < -1/n \\ nt & t \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$$

mostrare che essa converge, nella norma naturale su $C^*_{[-1,1]}$, al funzionale

$$\bar{f}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, \mathrm{sgn}(t)x(t).$$

Esercizio 5 *Dato l'operatore di shift in l^2:*

$$E^+ : (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$

1. *mostrare che l'insieme $|\lambda| < 1$ appartiene allo spettro discreto di E^+;*
2. *mostrare che l'insieme $|\lambda| > 1$ è regolare per E^+;*
3. *cosa succede per $|\lambda| = 1$?*

Esercizio 6 *Determinare autovalori e autovettori dell'operatore ciclico:*

$$T : (x_1, \ldots, x_N) \to (x_2, \ldots, x_N, x_1).$$

III esonero di MMF del 30/01/87

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dato l'operatore differnziale:*

$$L = i\frac{d}{dx} + \cos x$$

sulla varietà lineare $V(L) = \{f : f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})\}$,

1. *determinarne la funzione di Green;*
2. *trovare* $f \in V(L)$ *tale che* $(Lf)(x) = \theta(x)\cos x$.

Esercizio 2 *Dimostrare la formula (prodotto di convoluzione):*

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \delta(x-y)\delta(y).$$

Esercizio 3

1. *Con il metodo della funzione di Green si risolva l'equazione di Poisson sulla retta (V potenziale elettrostatico, ρ densità di carica):*

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \rho(x).$$

   Si imponga sulla funzione di Green la richiesta fisica che il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme dipenda solo dalla distanza (cioè $G(x,0) = G(-x,0)$). Si osservi inoltre che $G(x,y) = G(x-y,0)$

2. *Si sviluppino i calcoli per* $\rho(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione* $f(x) = 1$, $x \in [0,\pi]$.

A cosa converge la serie di Fourier in $x = 0$*? e in* $x = \pm\pi$*?*

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione* $f(x) = |x|$ $(x \in [-\pi,\pi])$.

Commentare, confrontando con l'esercizio precedente, la serie che si ottiene derivando termine a termine.

Esercizio 6 *Si supponga $f(z)$ analitica nel cerchio di raggio 1 (frontiera inclusa) ad eccezione al più del punto $z = 0$. Se ne scriva lo sviluppo di Laurent nell'intorno dell'origine. Lo si calcoli in un generico punto del cerchio di raggio 1. Si confronti il risultato con lo sviluppo in serie di Fourier usando la rappresentazione polare dei numeri complessi.*

Compito di MMF del 03/02/87

O.Ragnisco – Jona

Esercizio 1 *Dimostrare che la funzione:*

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{e^{zt}}{(t^2+1)}$$

è analitica per $\mathrm{Re}\, z < 0$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx\, x e^{\alpha x} \mathrm{sech}\, x, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Esercizio 3 *Data la successione di operatori lineari definiti su* $l^2(\mathbb{R})$*:*

$$A_N : x_n \to y_n = \begin{cases} (1/n)x_n + \alpha^n x_{n+1}; & 0 < \alpha < 1 \qquad n = 1, \ldots, N-1 \\ (1/N)x_N & n = N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. *formano una successione di Cauchy;*
2. *convergono (in norma) all'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \frac{1}{n} x_n + \alpha^n x_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

3. *vale la disuguaglianza* $||A|| \le 1 + \alpha$.

Esercizio 4 *Data, nello spazio euclideo complesso a* $N+1$ *dimensioni* $\mathbb{E}^{N+1}$*, la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} q_0 & \vdots & q_1 & q_2 & \ldots & q_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{q}_1 & \vdots & & & & \\ \bar{q}_2 & \vdots & & 0_{N\times N} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{q}_n & \vdots & & & & \end{pmatrix}, \qquad q_0 \in \mathbb{R},$$

trovare $\mathrm{Im}\, A$ *e* $\mathrm{Ker}\, A$ *e verificare che* $\mathbb{E}^{N+1} = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^\dagger$.

Esercizio 5 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:*

$$y'' + \omega^2 y = \delta(x^2 - a^2),$$

con le condizioni iniziali: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 6 *Determinare la trasformata di Fourier della distribuzione:*

$$\frac{1}{\pi} P\left(\frac{1}{x^2 - \epsilon^2}\right).$$

Compito di MMF del 07/04/87

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{at}}{\sinh t}; \qquad 0 < a < 1.$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$;
2. $1 < |z| < 4$;
3. $|z| > 4$.

Esercizio 3 *Dato in l^2 l'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-(k+n)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1. *si dimostri che* $\operatorname{Ker} A = 0$;
2. *si determini* $A^\dagger$;
3. *si dimostri che* A *è limitato.*

Esercizio 4

1. *Si risolva l'equazione differenziale matriciale:*

$$\dot{X} = AX = (A - \mathbb{I})X + X \cdot \mathbb{I}$$

con la condizione iniziale $X(0) = \bar{X}$, *essendo* A *una matrice che soddisfa l'equazione caratteristica* $A^2 - 2A + \mathbb{I} = 0$.

2. *Si consideri il caso particolare* $\bar{X} = \sigma_3$ *e*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 *Si dimostri la formula:*

$$i\pi\delta(x) = \lim_{n\to\infty} P\frac{e^{inx}}{x}.$$

Esercizio 6 *Si determini la funzione di Green dell'operatore:*

$$L = DpD; \qquad p = \frac{1}{x^2+1}; \qquad V(L) = \{f \in \mathcal{L}^2_{[-1,1]} : f(-1) = f(1) = 0\}$$

Compito di MMF del 15/09/87

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I := \int_a^b dx\,(b-x)\ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Esercizio 2 *Siano:*

$$S(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che:

1. $T(a) = \exp(S(a))$
2. $T(a)T(b) = T(a+b); \qquad T^{-1}(a) = T(-a)$

Esercizio 3 *Considerare la coppia di equazioni matriciali:*

$$\frac{dL}{dt} = [L, A] \qquad L(0) = \bar{L}$$
$$\frac{dQ}{dt} = [Q, A] + L \qquad Q(0) = \bar{Q}$$

dove L, A, Q sono matrici $n \times n$ e, inoltre, A è una matrice costante. Risolvere il sistema, dimostrando in particolare che:

1. *gli autovalori di $L(t)$ sono gli autovalori di $\bar{L}$ (costanti del moto);*
2. *gli autovalori di Q sono gli autovalori di $\bar{L}t + \bar{Q}$.*

Esercizio 4 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*
2. *è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti z_k tali che $z_k^3 = 1$, dove ha poli semplici;*
3. $\mathrm{Res} f(z)|_{z=\infty} = -1$.

Esercizio 5 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$g''(x) - \frac{3}{4(1+x^2)} g(x) = \delta'(x).$$

Suggerimento:

1. *cercare la soluzione dell'equazione omogenea associata nella forma:* $g_0(x) = x^\beta$*;*

2. *cercare la soluzione generale della non omogenea nella forma:* $g(x) = g_0(x) + \theta(x) g_1(x)$ *dove con* $g_0(x)$ *si intende ora la soluzione generale dell'omogenea associata e con* $g_1(x)$ *una soluzione particolare (da determinare) ancora dell'equazione omogenea.*

Esercizio 6 *Determinare il limite (nel senso delle distribuzioni) della successione:*

$$f_n(x) = n^2 \operatorname{sgn} x e^{-n|x|}$$

1. *direttamente;*

2. *studiando il limite della successione delle trasformate di Fourier:*

$$\hat{f}_n(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f_n(x).$$

Compito d'esonero di MMF del 16/11/87

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione razionale di variabile complessa che gode delle seguenti proprietà:*

1. *la parte principale del suo sviluppo di Laurent nell'intorno del punto all'*∞ *vale* $2z^3$*;*
2. *ha due poli semplici nei punti* $z_1 = 3,\ z_2 = 4i$ *con residui* $r_1 = 1,\ r_2 = 1/2$*;*
3. *vale* 1 *nell'origine.*

Esercizio 2 *Caratterizzare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z^{3/2}\frac{\mathrm{Log}(z^3 - 1)}{\sinh z}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^3 - 1}.$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1,$
2. $1 < |z| < 2,$
3. $|z| > 2,$
4. $0 < |z-1| < \sqrt(5).$

Compito di MMF del 09/12/87

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I_k = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\sin(k\theta)}{1 + b\cos\theta}; \qquad 0 < b < 1.$$

Esercizio 2 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + a^2)\frac{z}{\tanh z}.$$

Esercizio 3 *Si consideri lo spazio lineare S delle matrici $n \times n$ a elementi reali, dotato del prodotto scalare:*

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(X^\dagger Y)$$

e in esso l'operatore lineare:

$$A : X \to Y = [a, X],$$

essendo a una matrice diagonale $n \times n$ con elementi tutti distinti.

1. *Calcolare $A^\dagger$.*
2. *Dimostrare che $M = \{X : X_i i = 0, \ i = 1, \ldots, n\}$ è un sottospazio invariante di A.*
3. *Mostrare che la decomposizione in somma diretta: $S = \mathrm{Im\,A} \oplus \mathrm{Ker\,A}$ non è altro che la decomposizione di una matrice $n \times n$ nella sua parte diagonale e nella sua parte fuori–diagonale.*
4. *Esistono autovalori non nulli per l'operatore A?*

Esercizio 4 *Dimostrare che $y = a\theta(x) + \delta(x)$ è la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$xy' = -\delta(x).$$

Esercizio 5 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = \theta(x^2 - a^2) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-|x-y|} f_(y).$$

Compito di MMF del 02/02/88

A.Degasperis

Esercizio 1 *Calcolare il valore del parametro* g *per il quale l'oscillatore, che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x}(t) + x(t) = g\delta(t),$$

è a riposo: $x(t) = 0$*, per* $t > 0$*, sapendo che* $x(t) = 3\sin t$ *per* $t < 0$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos^3 x}{1 + x^2}.$$

Esercizio 3 *Sia* $f(z)$ *una funzione intera e*

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = [x(\cos x - \sin x) - y(\cos x + \sin x)]e^{-y}.$$

Calcolare la funzione

$$g(z) = \frac{d}{dz} f(z).$$

Esercizio 4 *Calcolare gli elementi di matrice* A_{mn} *della matrice infinita che rappresenta l'operatore differenziale*

$$A = \cos x \frac{d}{dx} + \sin x$$

nella base di Fourier di $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$*:*

$$\left\{ f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}.$$

Esercizio 5 *Dato il vettore* $\vec{a} = (1, -1, 2)$*, sia* A *l'operatore lineare tale che:*

$$A\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{v}, \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare gli autovalori e gli autovettori normalizzati di A.

Esercizio 6 *Trovare per quali valori del parametro reale c le seguenti funzioni appartengono allo spazio indicato:*

1. $f_1(x) = \dfrac{x^c(1-x^2)}{\sin(\pi x)(1-cx)}, \qquad f_1(x) \in \mathcal{L}^2_{[0,1]}$

2. $f_2(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)\sinh(4x)\ln|\tanh(cx)|}{x^2(c^2-x^2)}, \qquad f_2(x) \in \mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$

Compito di MMF del 02/02/88

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la funzione:*

$$f(z) = \cot z - \frac{1}{z},$$

1. *determinarne le sue singolarità in tutto il piano complesso chiuso e calcolare i residui corrispondenti;*
2. *scriverne l'espansione in fratti semplici (sviluppo di Mittag-Leffler);*
3. *assumendo l'uniforme convergenza dell'espressione suddetta, ottenere uno sviluppo per*

   $$g(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

   (sviluppo di Weierstrass).

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$I = \oint_C dz \frac{1}{\sin^2 z},$$

dove C è il cerchio centrato nell'origine di raggio $r = 3/2\pi$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 3 *La funzione $G(z)$ è definita dalla seguente rappresentazione integrale (trasformata di Laplace):*

$$G(z) = \int_0^\infty dt\, t^2 e^{-tz}.$$

Determinare il dominio di analiticità di $G(z)$ e il suo prolungamento analitico in tutto il piano complesso privato dell'origine.

Esercizio 4 *Diagonalizzare la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nei due casi:

1. $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$,
2. $\alpha = \gamma = O$, β *neq*0.

Determinare $\operatorname{Im} A$ *e* $\operatorname{Ker} A$

Esercizio 5 *In* l_1 *si consideri la successione di funzionali lineari:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k}$$

Si determini il limite $f(x)$ *di questa successione e la sua norma in* l_1^*.

Esercizio 6 *Calcolare il risolvente* $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ *dell'operatore*

$$A = x\frac{d}{dx}$$

definito sulla varietà lineare, densa in $\mathcal{L}^{\in}$ *delle funzioni di classe* C^1 *nell'intervallo* $[1, e]$, *e tali che:* $f(1) = f(e)$.

Determinarne poli e residui (nella variabile complessa λ*).*

Esercizio 7 *Utilizzando un'importante proprietà della trasformata di Fourier, calcolare:*

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x),$$

dove

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \frac{1}{y^2 + a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x - y) \frac{1}{y^2 + a^2}$$

Compito di MMF del 02/02/88

Bernardini

Esercizio 1 *Scrivere le condizioni differenziali di Cauchy–Riemann per le funzioni $F(\bar{z})$ della variabile complessa $\bar{z} = x - iy$. Sotto quali condizioni vale $F(\bar{z}) = \bar{F}(z)$? (specificare in termini di $Re(F)$ e $Im(F)$).*

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)}{x} dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 *E' possibile costruire due matrici hermitiane 2×2 che anticommutino e siano simultaneamente diagonalizzabili? (Fornire la dimostrazione per l'eventuale risposta positiva o negativa).*

Esercizio 4 *Determinare per quali valori di α e β la matrice*

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2$$

è un proiettore, essendo P_1 e P_2 proiettori ortogonali ($P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$).

Esercizio 5 *Determinare autovalori e autofunzioni dell'equazione di Fredholm:*

$$x(t) = \lambda \int_0^1 [\cos(2\pi t) - \cos(2\pi s)]\, x(s) ds.$$

Esercizio 6 *Trasformare in equazione di Volterra l'equazione differenziale*

$$\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + t^2 x(t) = 0$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1, \; \dot{x}(0) = 0$.

Compito d'esonero di MMF del 29/02/88

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dato l'operatore differenziale:*

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 3x \frac{d}{dx}$$

con le condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$,

1. *se ne determini la funzione di Green;*
2. *se ne calcolino autovalori e autofunzioni*

Esercizio 2 *Si determini lo sviluppo in serie di Fourier della funzione* $\cosh(zx)$ *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$. *Si utilizzi il risultato per ottenere una serie convergente alla funzione*

$$F(z) = \frac{\pi z}{\sinh(\pi z)}$$

Si confronti lo sviluppo ottenuto con lo sviluppo di Mittag–Leffler della funzione $F(z)$ *(facoltativo).*

Esercizio 3 *Si dimostri che (in un opportuno spazio di funzioni di prova) vale la relazione:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 e^{int} = -2\pi\delta''(t), \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Esercizio 4 *Si determini la trasformata di Fourier di* $f(x) = |x|$.

Suggerimento: si osservi che:

$$\int_0^\infty dx\, x e^{ikx} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^\infty dx\, x e^{i(k+i\epsilon)x}.$$

Esercizio 5 *Si dimostri che, se* $f(x)$ *è una funzione sviluppabile in serie di Taylor su tutta la retta, vale l'identità:*

$$\mathcal{F}\left(\exp(a\frac{d}{dx})f(x)\right) = e^{-ika}\hat{f}(k) = \mathcal{F}\left(f(x+a)\right).$$

Avendo denotato con $\mathcal{F}$ *la trasformata di Fourier.*

Esercizio 6 *Si determini la trasformata di Fourier della distribuzione*

$$P(\coth x).$$

Compito di MMF del 21/06/88

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(\alpha x)}{x^3 - 1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$$

e svilupparla in serie di potenze nell'intorno di $z = 0$. *Qual è il raggio di convergenza?*

Esercizio 3 *Determinare la funzione razionale* $R(z)$ *caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

1. *ha* N *poli semplici al finito nei punti* $z_k = \exp(2k\pi i/N),\ k = 0, \ldots, N-1$ *con residui* $(-1)^k$*;*
2. $R(0) = 0$*;*
3. *La parte principale del suo sviluppo di Laurent all'*∞ *vale* z^2.

Esercizio 4 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \delta(1 - x^2),$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esercizio 5 *Dimostrare che il limite in norma della successione di funzionali lineari su* $C[0,1]$ *definiti come:*

$$f_n(x) = \int_0^1 dt\, x(t)(1 - e^{-nt})$$

è zero.

Esercizio 6 *Sia M lo spazio lineare delle matrici $N \times N$ a elementi complessi. Si consideri su M l'operatore lineare A definito come:*

$$A : X \to Y = [a, X], \qquad X, Y \in M,$$

dove a è una matrice diagonale con elementi tutti distinti.

1. *Si dimostri che $\operatorname{Ker} A$ è il sottospazio $M_D \subset M$ costituito dalle matrici diagonali, e che $\operatorname{Im} A$ è il sottospazio M_F costituito dalle matrici fuori-diagonale (cioè tali che $M_{ii} = 0$ $i = 1, \ldots, N$).*

2. *Si verifichino le proprietà: $M = M_D \oplus M_F$, $AM_F = M_F$.*

3. *Dimostrare che: $\forall Y \in \operatorname{Im} A = M_F$, risulta $\operatorname{Tr}(a^k Y) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.*

I compito di esonero di MMF del 7/11/88

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 2},$$

sviluppparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $0 < |z + 1| < 3$;
2. $|z| < 1$;
3. $1 < |z| < 2$;
4. $|z| > 2$.

Esercizio 2 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ sapendo che:*

1. $\lim_{z\to\infty} \left(f(z) - 1 - z^2\right) = 0$
2. *$f(z)$ ha, al finito, come unica singolarità un polo di ordine 3 nell'origine; i coefficienti della parte principale del corrispondente sviluppo di Laurent sono individuate dalle relazioni:*
   (a) $\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 1,$
   (b) $\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^3 f(z)) = 0,$
   (c) $\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = -2.$

Esercizio 3 *Determinare in tutto il piano complesso chiuso le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z\mathrm{Log}(z^2 - 1).$$

Dire come si deve "tagliare" il piano complesso in modo da mantenere distini i diversi rami della funzione.

Esercizio 4 *Calcolare almeno due dei seguenti 4 integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos^2\theta}{2+\sin\theta}$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} dx \frac{x}{x^3+8}$

3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} dx \frac{\cos(2x)-1}{x^2}$

4. $\displaystyle P\int_{0}^{\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$

Compito di MMF 13/12/88

D.Levi

Esercizio 1 *Calcolare gli autovalori della matrice* 2×2 $A(x)$ *ottenuta come soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{dA}{dx} = \{\sigma_1, A\}$$

con la condizione iniziale $A(0) = \mathbb{I} + \sigma_3$.

Esercizio 2 *Calcolare i valori di c per i quali le seguenti funzioni sono ortogonali a* $f(x) = \cos(\pi x)$ *nell'intervallo* $[-1, 1]$*:*

1. $g_1(x) = x + ic \sin(\pi x)$
2. $g_2(x) = \sin(cx)$.

Esercizio 3 *Siano dati gli operatori*

$$A = a(x)\frac{d}{dx}, \qquad B = b(x)\frac{d}{dx}, \qquad C = e^{-x}.$$

Determinare $a(x)$ *e* $b(x)$ *in modo tale che valga:*

$$[\{A, C\}, B] = 2$$

con $a(1) = 1$, $b(0) = 0$.

Esercizio 4 *Determinare la trasformata di Fourier della funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le -1/2 \\ 1 & |x| < 1/2 \\ -x+1 & 1/2 \le x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 5 *Trovare i residui delle funzioni*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$
$$g(z) = e^z \csc^2(z)$$

nei loro poli al finito.

Compito di MMF del 13/12/88

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

Esercizio 2 *Determinare due funzioni $f_i(z)$ e $f_e(z)$ tali che:*

1. *$f_i(z)$ sia analitica all'interno del cerchio unitario;*
2. *$f_e(z)$ sia analitica all'esterno del cerchio unitario;*
3. *valga*
$$\lim_{z \to \zeta^-} f_i(z) - \lim_{z \to \zeta^+} f_e(z) = \mathrm{Re}(\zeta), \qquad |\zeta| = 1.$$

Esercizio 3 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_N \\ \dot{x}_j &= x_{j-1} \qquad j = 2, \dots, N \end{aligned}$$

con la condizione iniziale $x_j(0) = 1, \; j = 1, \dots, N$.

Esercizio 4 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$x f''(x) + f'(x) = \delta(x^2 - a^2), \qquad |a| \neq 1$$

con le condizioni iniziali: $f(1) = 0, \; f'(1) = 1$.

Esercizio 5 *Sia dato l'operatore $L = -D^2$ sulla varietà lineare (densa su $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$) delle funzioni appartenenti a $C^\infty_{[-1,1]}$ tali che $f(-1) = f(1) = 0$.*

1. *Trovarne autovalori e autofunzioni.*
2. *Determinare la funzione di Green.*

3. Indicando con $\hat{G}$ il corrispondente operatore, utilizzare la proprietà:

$$\mathrm{Tr}\hat{G} = \int_{-1}^{1} dt\, G(t,t)$$

per calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 6 *Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier, risolvere l'equazione differenziale*

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0,$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \psi(x,0) = x(\pi - x) \\ \psi(0,t) = \psi(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Compito di MMF del 13/12/88

Bernardini

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$J(k) = \int_0^\pi \frac{\cos^2\theta - k\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta} d\theta$$

con k reale positivo.

Esercizio 2 *Determinare il dominio di convergenza della serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n! + (n!)^2}{1 + (n!)^3} 2^n \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n .$$

Esercizio 3 *Scrivere nella forma di Pauli, $a_0\mathbb{I} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$, la matrice*

$$A = \sigma_3 \ln(1 + \alpha\sigma_3).$$

Esercizio 4 *Dire sotto quali condizioni la matrice*

$$A = \alpha\mathbb{I} + \beta \underline{u}\ \underline{v}^\dagger$$

è normale.

Esercizio 5 *Sia $f_1 = 1,\ f_2 = 1 + t,\ f_3 = 1 + t + t^2,$ e*

$$(f_i, f_j) = \int_{-1}^{1} f_i(t) f_j(t) dt.$$

Costruire tre combinazioni lineari ortonormali di f_1, f_2, f_3.

Esercizio 6 *Determinare autovalori e autosoluzioni normalizzate dell'equazione di Fredholm*

$$x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} K(t,s) x(s) ds,$$

dove

$$K(t,s) = \theta(t-\pi)\theta(\pi - s) + \theta(\pi - t)\theta(s - \pi),$$

e theta è la funzione a gradino.

Compito di MMF del 20/12/88

O.Ragnisco – Petrarca

Esercizio 1 *Trovare tutte le matrici* A *tali che:*

$$\exp(2\pi i A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 *Data la successione di funzionali lineari su* $C_{[-1,1]}$*:*

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} dt\,|t|^n x(t),$$

1. *trovarne il limite per* $n \to \infty$
2. *dimostrare che la successione* $g_n(x) = n \displaystyle\int_{-1}^{1} dt\,|t|^n x(t)$ *non tende a zero.*

Esercizio 3 *Si consideri, in* l^2*, la successione di operatori:*

$$A^{(N)} : x_n \to y_n = \begin{cases} x_2 + x_N & n = 1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} & n = 2, \dots, N-1 \\ x_{N-1} + x_1 & n = N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

1. *verificare che sono autoaggiunti e limitati;*
2. *verificare che lo spettro di* $A^{(N)}$ *è l'insieme:*

$$\sigma_N = \{0\} \cup \{\lambda_k\}_{k=1}^{N}; \qquad \lambda_k = \frac{2\cos(2\pi k)}{N};$$

3. *definendo l'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \begin{cases} x_2 & n = 1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

mostrare che, anche se

$$\lim_{N\to\infty} ||A^{(N)} - A|| \neq 0$$

(non c'e' convergenza forte), risulta però:

$$\lim_{N\to\infty} \left(e^{(k)}, A^{(N)}x\right) = \left(e^{(k)}, Ax\right) \qquad \forall x \in l^2,\ k \in \mathbb{N}$$

(ossia, c'e' convergenza debole).

Esercizio 4 *Si consideri, sulla varietà lineare delle funzioni in* $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$ *tali che* $f(\pi) = f(-\pi)$ *e prolungate per periodicità su tutta la retta reale, l'operatore di traslazione:*

$$(Tf)(x) = f(x+1).$$

1. *Si dimostri che* T *è unitario.*
2. *Se ne trovino autovalori e autofunzioni.*

Compito di MMF del 10/02/89

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione $f(z)$ analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = i,\ z_2 = -i$, in cui ha poli semplici con residui rispettivamente $r_1 = 3,\ r_2 = 5$, sapendo che:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) - 1 - z^2 = 0.$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^4 + 13z^3 + 802z}{53z^5 + 1044}$$

dove C_R è una circonferenza di centro l'origine e raggio R percorsa in senso antiorario.

Esercizio 3 *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Calcolare

$$B = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta\, f(\zeta)(\zeta - A)^{-1}$$

essendo A la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e C la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/2$.

Esercizio 4 *Sia L l'operatore differenziale del prim'ordine:*

$$L = \frac{d}{dx} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Calcolare la funzione di Green $G(x, y; \lambda)$ dell'operatore $L - \lambda$ nello spazio delle funzioni f tali che $f' \in \mathcal{L}^2_{[-a,a]}$ e che soddisfano le condizioni al contorno $f(-a) = f(a)$.

Dallo studio delle singolarità di G nel piano complesso λ risalire agli autovalori e alle autofunzioni di L nello spazio in oggetto.

Esercizio 5 *Dallo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, ricavare la formula:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi).$$

Esercizio 6 *Risolvere l'equazione integro–differenziale:*

$$f'(x) = x + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) e^{-|x-y|}.$$

Compito di MMF del 18/09/89

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. $f(0) = 0$;
2. *come uniche singolarità al finito ha 3 poli semplici nelle radici cubiche dell'unità, tutti con residuo uguale a 1;*
3. $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1$.

Esercizio 2 *Sia A una matrice che soddisfa l'equazione caratteristica: $A^3 = \mathbb{I}$.*

1. *Dire per quali valori di z è definita la funzione di matrice: $(\mathbb{I} - zA)^{-1}$ e trovarne l'espressione equivalente in termini di $\mathbb{I}, A, A^2$.*
2. *Specializzare il risultato al caso particolare:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 *Si consideri la matrice di Pauli σ_3 e, nello spazio lineare $M_2(\mathbb{C})$ delle matrici 2×2 a elementi complessi, si introduca l'operatore:*

$$A : X \to Y = [\sigma_3, X].$$

Si calcolino $\operatorname{Ker} A$ *e* $\operatorname{Im} A$ *e si verifichi che* $M_2(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$.

Esercizio 4 *In un generico spazio normato completo si consideri la successione di operatori:*

$$A_k = \mathbb{I} + \alpha^k B, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

dove B è un operatore limitato.

1. *Per quali valori di α la successione $\{A_n\}$ è convergente.*
2. *Qual è il limite della successione?*

Esercizio 5 *Qual è il limite della successione di distribuzioni:*

$$P\,\frac{e^{int}}{t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

nello spazio delle funzioni di prova holderiane nell'origine e tali che il rapporto incrementale

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

sia assolutamente integrabile sulla retta?

Esercizio 6 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = 2\delta(x) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{|y-x|} f(y).$$

Esercizio 7 *Studiare le singolarità nel piano complesso della variabile z, della funzione:*

$$f(z) = \mathrm{Tr}(e^{-zH}),$$

dove H è l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico quantistico, di autovalori

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Compito di MMF del 15/12/89

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare esplicitamente la funzione:*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(|x|+1)(x-z)}, \qquad \mathrm{Im} z \neq 0$$

e verificare la formula di Plemely:

$$\lim_{\epsilon \to 0} [F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)] = 2\pi i \frac{1}{|x|+1}.$$

Esercizio 2 *Scrivere una trasformazione di Moebius:*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

che mappa la circonferenza unitaria (del piano z) nell'asse reale (del piano w) e l'interno (l'esterno) del cerchio unitario nel semipiano inferiore (superiore).

Esercizio 3 *Sia P un proiettore ($P^2 = P$). Risolvere l'equazione differenziale:*

$$\frac{d}{dt} X = [P, X] .$$

Specializzare la soluzione al caso particolare in cui P proietta lungo il vettore $(1, -1)$ e $X(0) = \sigma_3$.

Esercizio 4 *Nello spazio l^2 si consideri l'operatore E tale che:*

$$(E\underline{x})_n = x_{n-1}, \qquad n > 1; \qquad (E\underline{x})_1 = 0$$

e si mostri che la successione di operatori $\{E^k\}$ tende debolmente a zero.

Esercizio 5 *Calcolare, nel senso delle distribuzioni, la somma della serie:*

$$S(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 e^{in\theta}$$

prendendo, ad esempio, come spazio di funzioni di prova le funzioni $C^\infty[-\pi, \pi]$ periodiche con tutte le loro derivate.

Esercizio 6 *Usando le proprietà della trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \frac{e^{i(x-y)}}{(x-y)^2 + 1}$$

sapendo che $\hat{g}(k) = \delta'(k)$.

Compito di MMF del 13/09/94

A.Vulpiani

Esercizio 1 *Siano P_1 e P_2 gli operatori che proiettano rispettivamente lungo le direzioni dei vettori*

$$\underline{v}^{(1)} = (1, 2, -1) \qquad \underline{v}^{(2)} = (2, -1, 0).$$

Calcolare la traccia dell'operatore:

$$\frac{\mathbb{I} - P_2}{\mathbb{I} + \frac{2}{51}P_1 + \frac{1}{10}P_2}$$

Esercizio 2 *Trovare la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$$

Esercizio 3 *Calcolare, per $t > 1$, la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\delta(t^2 - 1)$$

che soddisfi le condizioni iniziali $x(-2) = \dot{x}(-2) = 0$.

Esercizio 4 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta}.$$

Esercizio 5 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\ln(x - 1/2)}{x(4x^2 + 3)} dx.$$

Compito di MMF del 13/09/94

A.Degasperis

Esercizio 1 *Trovare le soluzioni dell'equazione:*
$$\left(\frac{d}{dx}+2x\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right)f(x)=0$$
appartenenti a $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$.

Esercizio 2 *Sia* A *la matrice* 2×2 *data da:*
$$A=2\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3$$
e w *il vettore* $(1-i,1)$. *Trovare la soluzione* $v(t)$ *dell'equazione differenziale:*
$$\frac{d}{dt}v(t)=Av(t)+\delta(t)w$$
che soddisfi la condizione iniziale $v(-1)=(0,0)$.

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*
$$I=\oint_C dz\frac{\exp(z^2)}{(z^2-1)^2\sin(\pi z)}$$
dove C *è la circonferenza di equazione* $|z-1/2|=1$ *percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale*
$$I=P\int_0^\infty dx\frac{\sin(kx)}{x(x^2-1)},\qquad k\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 5 *Sia* K *l'operatore integrale che opera in* $\mathcal{L}^2_{[0,1]}$ *con nucleo*
$$K(x,y)=xy(x+y).$$
Calcolare $\mathrm{Tr}(K^3)$.

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale*
$$I=\int_0^\infty dx\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Compito di MMF del 13/09/94

Bernardini

Esercizio 1 *Determinare il dominio di convergenza nel piano z della serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^n .$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta.$$

Esercizio 3 *La matrice incognita $\hat{X}(t)$ soddisfa l'equazione differenziale*

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{2} \left[\hat{X}, \hat{B} \right],$$

essendo $\hat{B}$ indipendente da t. Sono possibili e, se sì, a quali condizioni, e quali sono, le soluzioni per cui l'anticommutatore $\{\hat{X}(t), \hat{B}\} = 0$ per ogni t?

Esercizio 4 *Determinare autovalori e autosoluzioni dell'equazione di Fredholm*

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{sign}(t) + \mathrm{sign}(s)}{(1+|t|)(1+|s|)} x(s) ds.$$

Esercizio 5 *Determinare le varietà caratteristiche dell'equazione a derivate parziali*

$$2\partial_x^2\phi + 2\partial_y^2\phi - 5\partial_x\partial_y\phi = 0.$$

Compito di esonero di MMF del 21/11/1994

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quali valori del parametro reale positivo a l'operatore*

$$A : x \to ax(1-x) \qquad x \in [0,1]$$

è una contrazione?

Qual è per questi valori di a, l'unico punto fisso di A (se $x \in [0,1]$)?

Esercizio 2 *Supponendo A matrice diagonalizzabile, dimostrare che:*

$$\det[\exp(A)] = \exp[\mathrm{tr}(A)].$$

Sapreste estendere la dimostrazione al caso in cui A sia riducibile ad una matrice di Jordan? (facoltativo)

Esercizio 3 *Dimostrare che la successione di funzionali lineari:*

$$f_{(n)}(\underline{x}) := \sum_{j=1}^{n}$$

converge se $\underline{x} \in l_1$, ma non converge se $\underline{x} \in l_2$.

Per $\underline{x} \in l_1$, calcolare il limite $f(\underline{x})$ della successione e la sua norma.

Esercizio 4 *Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = a\delta(x).$$

Mettere in relazione il risultato con quanto si conosce dall'elettrostatica a proposito del campo elettrico generato da una superficie piana conduttrice infinita (facoltativo).

Esercizio 5 *Per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ l'operatore definito dalle relazioni:*

$$U\underline{e}^{(1)} = \alpha\underline{e}^{(2)}; \qquad U\underline{e}^{(2)} = \beta\underline{e}^{(3)}; \qquad U\underline{e}^{(3)} = \gamma\underline{e}^{(1)}$$

è unitario? Quali sono i suoi autovalori ed autovettori?

Esercizio 6 *Sia* $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ *una base ortonormale in* $\mathbb{E}^N$*. Dato l'operatore*

$$A = \mathbb{I} + \lambda \sum_{k=0}^{N} \alpha_k |v^{(k)}\rangle\langle v^{(k)}|, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}\ \forall k, \alpha_k \neq \alpha_r \text{ per } k \neq r,$$

1. *determinare i suoi autovalori;*
2. *dire per quali valori di* λ *esso non è invertibile;*
3. *scelto uno dei suddetti valori di* λ*, individuare le condizioni cui deve soddisfare il vettore* $\underline{y} \in \mathbb{E}^N$ *affinché abbia soluzioni l'equazione* $\underline{y} = A\underline{x}$*.*

III compito di esonero di MMF (a.a. 1995-96)

D.Levi – O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = y(t) - \mu \int_{-\infty}^{t} ds\, K(t-s)x(s)$$

dove

$$K(t) = \begin{cases} e^{-\mu t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (\mu > 0),$$

$$y(t) = \frac{e^{-\mu|t|}}{2\mu}$$

Esercizio 2 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale:*

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2$$

tale che $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[0, 1]$, *la funzione:*

$$f(x) = x(1 - x^2).$$

Utilizzare il risultato per calcolare il valore della funzione $\zeta(z)$ *di Riemann nel punto* $z = 2$, *la funzione* $\zeta(z)$ *essendo definita come:*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

III compito di esonero di MMF del 03/02/95

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Scrivere una trasformazione di Moebius:*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

che mappa la circonferenza unitaria (del piano z) nell'asse reale (del piano w) e l'interno (l'esterno) del cerchio unitario nel semipiano inferiore (superiore).

Esercizio 2 *Determinare il dominio del piano complesso in cui converge la serie:*

$$f(z) = \mathrm{Tr}(e^{-zH}),$$

dove H è l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico quantistico, di autovalori

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Scrivere poi esplicitamente la somma della serie e studiarne le singolarità in tutto il piano complesso.

Esercizio 3 *Svilupppare in serie di Laurent, nell'anello* $1 < |z| < 3$*, la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z - 3}.$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}, \qquad r < R.$$

Provare a calcolare l'integrale, più generale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{e^{in\theta}}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}, \qquad r < R.$$

Esercizio 5 *Calcolare gli integrali:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x(x^2 + a^2)},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{\cosh x}.$$

Compito di MMF del 15/02/95

O.Ragnisco

Esercizio 1 *L'operatore U agisce sui vettori di una base ortonormale dello spazio euclideo tridimensionale nel modo seguente:*

$$Ue^{(1)} = e^{(3)}; \qquad Ue^{(2)} = e^{(1)}; \qquad Ue^{(3)} = e^{(2)}.$$

Dimostrare che U è unitario e determinarne autovalori e autovettori.

Esercizio 2 *Si consideri in l^2 l'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \alpha_n x_n + x_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dimostrare che:

1. *A è limitato;*
2. *gli α_n sono autovalori di A.*

Si determini inoltre A^+.

Esercizio 3 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$xy''(x) + y'(x) = \delta(x-1)$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione:*

$$f(x) = \cosh x \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Utilizzare il risultato per calcolare la serie numerica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}.$$

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 4}$$

nei domini:

1. $|z| < 1$,

2. $1 < |z| < 4$.

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^4-1}dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

Compito di MMF del 28/02/95

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data in* l^2 *la successione di vettori:*

$$\underline{v}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} e^{-k\alpha} \underline{e}^{(j)}, \qquad \alpha > 0,$$

con $\{\underline{e}^{(j)}\}$ *base ortonormale,*

1. *dimostrare che è di Cauchy,*
2. *calcolare la norma di* $\underline{v}^{(n)}$ *nel limite* $n \to \infty$.

Esercizio 2 *Data la matrice* 2×2*:*

$$A = \exp(i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma})$$

dove $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$, *essendo* n_i *le componenti di un vettore unitario e* σ_i, $i = 1, 2, 3$ *le matrici di Pauli, calcolarne autovalori e forma esplicita.*

Esercizio 3 *Calcolare autovalori e autofunzioni degli operatori in* $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$*:*

$$A_{\pm} = \pm \frac{d}{dx} + x$$

sulla varietà lineare delle funzioni C^{∞} *che soddisfano condizioni periodiche* $(f(-1) = f(1))$.

Esercizio 4 *Calcolare la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione*

$$(D * D)(x), \qquad D(x) = \theta(x) e^{-ax}, \qquad a > 0.$$

$(\theta(x)$ *funzione a gradino).*

Esercizio 5 *Dimostrare che i seguenti integrali:*

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{a \exp(in\theta) - 1} \qquad a < 1$$

sono nulli per ogni intero n *non nullo.*

Esercizio 6 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$$

nei domini:

1. $|z| < 1$,
2. $|z| > 2$.

Compito di MMF del 07/02/96

?

Esercizio 1 *Determinare due funzioni $f_i(z)$ e $f_e(z)$ tali che:*

1. *$f_i(z)$ sia analitica all'interno del cerchio unitario;*
2. *$f_e(z)$ sia analitica all'esterno del cerchio unitario;*
3. *valga*
$$\lim_{z\to\zeta^-} f_i(z) - \lim_{z\to\zeta^+} f_e(z) = \mathrm{Re}(\zeta), \qquad |\zeta| = 1.$$

Esercizio 2 *Sia:*
$$f_n(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt} t^n \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Trovare il dominio nel piano complesso z in cui vale l'uguaglianza:
$$f_n(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} f_0(z).$$

Esercizio 3 *Trovare autovalori e autovettori della matrice unitaria:*
$$U = e^{i\alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\vec{\sigma}}, \qquad \hat{\mathbf{n}}\cdot\vec{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3, \qquad ||\hat{\mathbf{n}}|| = 1.$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[-1,1]$ la funzione*
$$f(x) = x^2.$$
Si verifica il fenomeno di Gibbs? In quali punti?

Esercizio 5 *Trovare autovalori e autofunzioni di $R(\lambda) = (L - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ dove L è l'operatore differenziale definito da:*
$$(Lf)(x) = if'(x) + xf(x)$$
e dal dominio
$$\mathcal{D}_L = \{f(x) \in \mathcal{L}^2_{[0,1]};\ f(0) = f(1)\}$$
Determinare esplicitamente $R(\lambda)$ calcolando la funzione di Green di $L - \lambda\mathbb{I}$.

Compito di MMF del 13/06/96

D.Levi – O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i} + c_0 + c_1 z \qquad (|z_i| < R, \quad i = 1, \dots, N)$$

costruire $f^{(-)}(z)$*, analitica per* $|z| < R$*, e* $f^{(+)}(z)$*, analitica per* $|z| > R$*, tali che*

$$\lim_{|z|\to\infty} f^{(+)}(z) = 0$$
$$\lim_{|z|\to R^-} f^{(-)}(z) - \lim_{|z|\to R^+} f^{(+)}(z) = f(z)|_{|z|=R}$$

Esercizio 2 *Data* $f(t)$ *tale che*

$$\int_0^\infty dt |f(t)| < \infty,$$

determinare il dominio di analiticità di:

1. $F_1(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt} f(t)$,
2. $F_2(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t} f(t)$.

Esercizio 3 *Sia* N *una matrice* $n \times n$*, nilpotente di grado* $k \le n$ *(cioè tale che* $N^k = 0,\ N^r \neq 0$ *per* $r < k$*). Data*

$$A = \mathbb{I} + aN \qquad a \in \mathbb{C},$$

scrivere $exp(A)$ *in funzione delle potenze di* N*.*

Estendere il risultato al caso di una generica $f(A)$*, con* $f(z)$ *intera (facoltativo).*

Esercizio 4 *Le funzioni* $f_n(x)$ *sono definite dalla relazione di ricorrenza:*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x-y) f_{n-1}(y) \qquad n = 1, 2, \dots$$

con $f_0(x) = \theta(x)$*, dove* $\theta(x)$ *è la funzione a gradino:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Dimostrare la formula

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\theta(x).$$

Esercizio 5 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$A := x\frac{d}{dx},$$

definito sulle funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$ *che soddisfano* $f(a) = f(b)$ *(*$0 < a < b$*).*

Compito di Metodi matematici della fisica del 12/09/96

?

Esercizio 1 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti ζ_k tali che $\zeta_k^3 = 1$ $(k = 1, 2, 3)$ in cui ha poli semplici con residui $r_k = \pi$, sapendo che $f(0) = 1$.*

Esercizio 2 *Determinare il dominio di analiticità della funzione*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, te^{-zt}.$$

Esercizio 3 *Sia T la matrice ciclica $N \times N$ definita dalle relazioni:*

$$\begin{array}{lll} Te^{(k)} = e^{(k+1)} & k = 1, \ldots, N-1 & \\ Te^{(N)} = e^{(1)} & & (e^{(j)})_k = \delta_{jk} \end{array}$$

Si osservi che vale la proprietà $T^N = \mathbb{I}$.

Si consideri la matrice

$$A = \frac{\mathbb{I} + \alpha T}{\mathbb{I} - \alpha T} \qquad 0 < \alpha < 1$$

e se ne determini la norma, utilizzando la definizione:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} \sqrt{(Ax, Ax)}$$

dove $(\cdot, \cdot)$ è l'usuale prodotto scalare in $\mathbb{E}^N$.

Esercizio 4 *Sia P un operatore di proiezione ($P^2 = P$). Scrivere la funzione $e^{\beta P}$ nella forma:*

$$e^{\beta P} = \mathbb{I} + f(\beta)P,$$

con l'appropriata $f(\beta)$.

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione:*

$$f(x) = e^{|x|}.$$

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} dt\, e^t \delta(\sin t).$$

I compito di esonero di MMF del 08/11/96

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale delle funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{Re}z}{z^2+1}; \quad f_2(z) = \frac{\mathrm{Im}z}{z^2+1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento (-1,1) dell'asse reale e dai due segmenti congiungenti rispettivamente i punti -1 e 1 con il punto $\frac{3}{2}i$. *Confrontare il risultato con il valore assunto, sullo stesso cammino dall'integrale della funzione* $f(z) = (z^3+1)^{-1}$.

Esercizio 2 *Verificare che la trasformazione (detta trasf. di Cayley):*

$$w \;=\; i\frac{1-z}{1+z}$$

mappa la circonferenza $|z| = 1$ *del piano* z *nell'asse reale del piano* w.

A quale semipiano corrisponde l'esterno (l'interno) del cerchio unitario del piano z*?*

Esercizio 3 *Data la funzione* $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$, *svilupparla in serie di potenze*

a) nel dominio $0 < |z+1| < \sqrt{3}$ *(Laurent)*

Si consiglia il cambiamento di variabile $w = z+1$.

b) nel dominio $|z| < 1$ *(Taylor)*

Esercizio 4 *Determinare la funzione* $f(z)$, *analitica in tutto il piano complesso chiuso ad eccezione del punto* $z = 0$, *in cui ha un polo doppio, e del punto all'infinito, in cui ha un polo semplice, sapendo che:*

$$lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1; lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 2$$

e che $f(z)$ *ha due zeri semplici nei punti* $z_\pm = \pm i$. *(???????????????????)*

Esercizio 5 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = P\int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 - a^2}$$

$$I_2 = P\int_0^\infty dx \frac{ln(x)}{x^2 - a^2}$$

$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{1 - coskx}{x^2(x^2 + a^2)}$$

$$I_4 = \int_0^\infty dx \frac{coskx}{cosh\beta x}$$

Per l'ultimo integrale, si suggerisce il cambiamento di variabile $t = e^{\beta x}$.

I compito di esonero di MMF del 04/11/97

?

Esercizio 1 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ che ha due zeri doppi nei punti ± 1, due poli doppi nei punti $\pm i$ e tende a 1 quando $z \to \infty$.*

Esercizio 2 *Sul cerchio $|\zeta| = 1$ è assegnata la funzione*

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{1 + a\cos\theta}, \qquad a < 1;\ \zeta = \exp(i\theta).$$

Determinare le funzioni $F^{\pm}(z)$, analitiche rispettivamente per $|z| < 1$, $|z| > 1$, tali che $F^{\pm}(z) \to \phi(\zeta)$, quando $z \to \zeta^{\pm}$.

Esercizio 3 *Identificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} z}{\sinh z}.$$

Indicare anche un possibile modo per "tagliare" il piano complesso in modo che i diversi rami monodromi della funzione rimangano separati.

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Laurent nell'anello $a - \sqrt{a^2 - 1} < |z| < a + \sqrt{a^2 - 1}$ la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1}$$

Esercizio 5 *Calcolare uno (o più) dei seguenti integrali:*

$$I_1 = \int_0^{\infty} dx \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}};$$

$$I_3 = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{\sinh x}.$$

Compito di MMF del 22/06/1998

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Utilizzando il teorema dei residui, dimostrare la formula:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i} = \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)}$$

dove:

$$Q^{(N)}(z) = \prod_{i=1}^{N} (z - z_i), \quad P^{(N-1)}(z) = \prod_{i=1}^{N-1} (z - \mu_i), \quad r_i = \frac{\prod_{j=1}^{N} (z_i - \mu_j)}{\prod_{k \neq i} (z_i - z_k)}.$$

Esercizio 2 *Senza effettuare l'integrale, dimostrare la formula:*

$$\oint_C dz \frac{1}{z^4 + 8z - 9} = 0,$$

dove C è un cerchio di centro l'origine e raggio $R > 9$.

Esercizio 3 *Utilizzando la decomposizione di una matrice 2×2 in matrici di Pauli, scrivere in forma matriciale l'equazione vettoriale:*

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{b} \wedge \vec{j}(t),$$

con $\vec{b}$ vettore costante e trovare la soluzione corrispondente alla condizione iniziale: $\vec{j}(0) = (0, 0, 1)$.

Senza integrare esplicitamente l'equazione, dimostrare che il modulo del vettore $\vec{j}(t)$ è una costante del moto.

Esercizio 4 *Dato l'operatore su l^2*

$$A : x_n \to y_n = \begin{cases} x_{n+1} & n = 1 \\ x_{n+1} - x_{n-1} & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

1. *Trovare $A^\dagger$.*
2. *Dimostrare che $||A|| \leq 2$.*

3. *Dimostrare che lo spettro di A è un sottoinsieme chiuso e limitato dell'asse immaginario.*

Esercizio 5 *Mediante la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione alle derivate parziali:*

$$i\frac{\partial G}{\partial t} + b\frac{\partial G}{\partial x} = \delta(x)\delta(t), \qquad b > 0.$$

Esercizio 6 *Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni, vale la formula:*

$$\lim_{N\to\infty} e^{iNt}\frac{\sin t}{t} = 0.$$

I Compito d'esonero di MMF del 04/11/1998

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_0^{\infty} dt \frac{t^{\mathrm{i}\alpha-1}}{(\ln t+b)^2+a^2}.$$

(Suggerimento: si consideri un opportuno cambiamento di variabile ...).

Esercizio 2 *Si consideri la funzione $g(t)$ definita qui di seguito:*

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\mathrm{i}xt}}{x-\epsilon+\mathrm{i}\delta}$$

dove $\delta>0$.
Dimostrare che

$$g(t=0^+)-g(t=0^-)=-2\pi\mathrm{i}.$$

Esercizio 3 *Dimostrare la seguente relazione*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)\pi\mathrm{i}+a]^2}=-\frac{4}{\cosh^2(a/2)}.$$

Utilizzare il risultato per dimostare che

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+...=\frac{\pi^2}{8}.$$

(Suggerimento: si considerino i poli della tangente iperbolica per trasformare la serie in un integrale nel campo complesso e ...).

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale*

$$I \;=\; P\int_0^{2\pi} d\theta \frac{cos\theta}{1-sin\theta}.$$

Esercizio 5 *Determinare la funzione razionale che gode delle seguenti proprietà:*

(i) Ha un polo doppio nell'origine con residuo nullo e un polo doppio all'infinito;
(ii) $lim_{z\to 0} z^2 f(z) \ = \ lim_{z\to\infty} z^{-2} f(z) \ = \ 1$;
(iii) $f(1) = f'(1) = 0$.

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^3 - 1}.$$

Esercizio 7 *Si risolva il seguente sistema di equazioni lineari:*

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \alpha(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \qquad \mathrm{mod}\ N$$

II Compito d'esonero di MMF del 04/12/98

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Dati in* $\mathbf{C}^3$ *i tre vettori* $\mathbf{v}^{(1)} = (1,0,0)$, $\mathbf{v}^{(2)} = (0,1,\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\mathbf{v}^{(3)} = (0,\mathrm{i},1)/\sqrt{2}$, *linearmente indipendenti*

1. *si trovino gli operatori di proiezione corrispondenti ai sottospazi da essi generati,* $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{P}^{(3)}$.
2. *Si costruisca la matrice con autovalori* $\lambda_1 = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\lambda_2 = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1$, *ed autovettori* $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$, *rispettivamente.*

Esercizio 2 *Dato in* $\mathbf{R}^3$ *l'asse con versore unitario* $\hat{\epsilon} = \cos\psi\mathbf{e}^{(1)} + \sin\psi\mathbf{e}^{(2)}$, *si determini la matrice unitaria* $\mathbf{U}_{\hat{\epsilon}}(\phi)$, *che descrive una rotazione di angolo* ϕ *intorno a quest'asse. Si trovino autovalori ed autovettori della matrice* $\mathbf{U}_{\hat{\epsilon}}(\phi)$. *Si specializzi il risultato al caso* $\psi = \phi = \pi/4$.

Esercizio 3 *Si calcoli la funzione di matrice* $\ln(1-z\sigma_2)$ *utilizzando la definizione di funzione di matrice in serie di potenze. Si discuta per quali valori di* z *è definita tale funzione. Qui* σ_2 *è una delle tre matrici di Pauli.*

Esercizio 4 *Si consideri l'equazione matriciale* $[\mathbf{A},\mathbf{X}] = 0$ *dove* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{X}$ *sono matrici due per due a traccia nulla.*

1. *Si determini la forma della soluzione* $\mathbf{X} = \mathbf{x}\cdot\underline{\sigma}$ *soddisfacente alla condizione* $\mathbf{X}^2 = \sigma_0$, *dove con* $\underline{\sigma}$ *si è indicato il vettore delle matrici di Pauli.*
2. *Si scriva* $\mathbf{X}$ *in modo esplicito per il caso* $\mathbf{A} = \sigma_2 + 2\sigma_3$.

Esercizio 5 *Si dimostri la formula:* $det(\exp A) = \exp(TrA)$ *dove* det *e* Tr *indicano rispettivamente Determinante e Traccia, e* A *e' una Matrice diagonalizzabile.*
Provare a dimostrare la formula anche nel caso in cui A *non sia diagonalizzabile, ma riducibile alla forma di Jordan.*

Esercizio 6 *Si consideri il seguente cambiamento di coordinate in* $\mathbf{R}^3$ *(Jacobi):*

$$\begin{aligned} x' &= 1/\sqrt{3}(x+y+z) \\ y' &= 1/\sqrt{2}(x-y) \\ z' &= 1/\sqrt{6}(x+y-2z) \end{aligned}$$

si dimostri che la corrispondente matrice e' unitaria (anzi, ortogonale) e se ne determino autovalori e autovettori..

Esercizio 7 *Si risolva il seguente sistema di* N *equazioni lineari:*

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = \alpha(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (\text{modulo } N)$$

Suggerimento: Si trasformi il sistema in una equazione lineare vettoriale, della forma $d^2\mathbf{x}/dt^2 = A\mathbf{x}$.
Si diagonalizzi A *e si risolvano le equazioni scalari per le componenti del vettore* $\mathbf{x}$ *lungo gli autovettori di* A.

Esercitazione di MMF del 22/12/98

?

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(nt)\ (1+t^2)^{-1/2}.$$

Esercizio 2 *I funzionali lineari $f_n(\mathbf{x})$ su l^2 sono definiti dalla relazione:*

$$f_n(\mathbf{x}) \ = \ (-1)^n x_n$$

Dire se sono limitati e calcolarne la norma; dire se formano una successione convergente.

Esercizio 3 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$y''(t) + \frac{2t}{(1+t^2)} y'(t) = 3\delta(t).$$

Esercizio 4 *La serie di Fourier di una funzione di modulo integrabile in $[-\pi, \pi]$ è data dall'espressione:*

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(int)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \exp(-int) f(t)$$

Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t)$$

e di conseguenza la serie di Fourier della $\delta(t)$.

III Compito d'esonero di MMF del 22/01/99

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{array}{cc} 0\ , & -\pi < x < 0 \\ \sin x\ , & 0 < x < \pi \end{array} .$$

Esercizio 2 *Calcolare la trasformata di Fourier di* $f(x) = \sin x/x$.

Esercizio 3 *Calcolare la trasformata di Fourier di* $f(x) = \tanh x$.

Esercizio 4 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - a^2 f(x) = \delta(x-b)$$

con le condizioni al contorno $f(0) = f(L) = 0$, *dove* $0 < b < L$.

Esercizio 5 *Sia* T_N *l'operatore ciclico sullo spazio euclideo* N*-dimensionale, e* T_N^{-1} *il suo inverso:*

$$T_N x_j = x_{j+1}(j = 1, \ldots, N-1); \quad T_N x_N = x_1$$
$$T_N^{-1} x_j = x_{j-1}(j = 2, \ldots, N); \quad T_N x_1 = 0$$

Mostrare che T_N *(risp.*T_N^{-1}*) tende debolmente a* D *(risp.* C*) dove:*

$$Dx_j = x_{j+1}(j = 1, 2, \ldots)$$
$$Cx_j = x_{j-1}(j = 2, 3, \ldots); \quad Cx_1 = 0$$

Si ricordi che
$A_N \to A$ **debolmente** *se* $\lim_{N\to\infty}(y, (A - A_N)x) = 0, \forall x, y \in \mathcal{H}$

Esercizio 6 *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{n\to\infty} \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt(1+t^2)^{-1}[\frac{nt\cos(nt) - \sin(nt)}{t^2}]$$

Compito di MMF del 13/07/99

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare gli integrali:*

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \frac{(sinx)^{2n}}{1+acosx}; \quad |a|<1.$$

Esercizio 2 *Classificare le singolarita sulla sfera di Riemann della funzione* $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$.

Esercizio 3 *Sia* $P(z)$ *un polinomio di grado* n*, con zeri* $\{z_j\}_{j=1}^n$*. Dimostrare la formula:*

$$\sum_{j=1}^n \frac{z_j^k}{P'(z_j)} \ = \ 0; \quad k = 0,\ldots,n-2.$$

Suggerimento: si consideri $\oint dz \frac{z^k}{P(z)}$*, dove l'integrale e' fatto lungo una opprtuna curva chiusa* C*.*

Esercizio 4 *Integrare l'equazione* $\ddot{\mathbf{r}} = \alpha\dot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{B}$*, con* $\mathbf{B} = (0,0,B)$*,* $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$*,* $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0,v_0,0)$*.*

Esercizio 5 *Data la successione* $f_n(t) = \frac{sin[n(t^2-\pi^2)]}{t^2-\pi^2}$*, dimostrare che:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \ cost \ f_n(t) \ = \ -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 6 *Usando la trasformata di Fourier risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) \ = \ c + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{(x-y)^2+\gamma^2} f(y).$$

Compito di MMF del 07/09/99

O.Ragnisco, R.Raimondi

Esercizio 1 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) \ = \ z^{\frac{1}{2}} \mathrm{sech} z$$

.

Esercizio 2 *Siano $f_+(z)$ e $f_-(z)$ i due rami monodromi della funzione $f(z)$ dell'esercizio 1 che si ottengono tagliando il piano complesso lungo il semiasse reale positivo; calcolare:*

$$R_+ = Res(f_+(z))|_{z=i\pi/2}; \quad R_- = Res(f_-(z))|_{z=-i\pi/2}$$

.

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale $F(x) \ = \ \int_0^\infty dt \ \frac{\cos xt}{1+t^2}$.*

Esercizio 4 *La matrice A soddisfa l'equazione caratteristica $A^2 - 3A + 2I \ = \ 0$. Calcolare $exp(A)$.*

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$F(y) \ = \ \lim_{n\to\infty} n\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ \frac{\exp[-(t-y)^2]}{1+n^2t^2}$$

.

Esercizio 6 *Trovare autovalori e autovettori dell'operatore $L_t = i\frac{d}{dt} + t^2$, definito sulla varietà lineare delle funzioni che soddisfano la condizione al contorno: $f(1) \ = \ f(-1)$.*

Compito di MMF del 28/11/99

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Determinare* $f(z)$ *sapendo che:*
a. $f(0) = 0$; $\quad$ *b.*$\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 1$;
c. $f(z)$ *ha due poli doppi in* -1 *e* $+1$ *con residui* $r_{-1} = 0$ *e* $r_{+1} = 1$;
$\lim_{z\to\pm 1}(z \mp 1)^2 f(z) = 2$.

Esercizio 2 *Calcolare*

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{exp(i\alpha x)}{sinh(x)} \qquad \alpha > 0, \alpha < 0, \alpha = 0$$

.

Esercizio 3 *Dire se sono vere le seguenti stime asintotiche e spiegarne il motivo:*

$$a. \quad 2sinh(\alpha x) \sim exp(\alpha x), \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 0$$

$$b. \int_0^{+\infty} dt \frac{sin(\lambda t)}{(1+t^2)} \quad = \quad O(\lambda^{-1}, \lambda \to \infty$$

$$c. \frac{1}{(1-x)} = 1 + x + O(x^2), \quad x \to 0$$

Esercizio 4 *Sapendo che* $det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 1$, *scrivere la funzione di matrice* $exp(A)$ *in termini di* I, A, A^2.

Esercizio 5 *Calcolare tr* $\mathbf{v}(z)\mathbf{v}^\dagger(z)$, *dove* $\mathbf{v}(z)$ *è il vettore colonna di componenti* $v_k = z^k (k = 1, \ldots, N)$.

Esercizio 6 *Nello spazio delle matrici reali $N \times N$, munito del prodotto scalare $(X, Y) = tr \quad X^t Y$, è definito l'operatore:*

$$\mathcal{A} : X \to Y = [A, X]$$

con A matrice assegnata.
a. Determinare $\mathcal{A}^\dagger$
b. Assumendo A diagonale con elementi distinti si ottiene chiaramente:

$$Y_{ij} = (a_i - a_j) X_{ij}$$

si dimostri che 0 è autovalore con molteplicità N di $\mathcal{A}$ e se ne determinino le "automatrici".

Esercizio 7 *Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier (vedi anche es.2), si risolva l'equazione integrale (con nucleo di convoluzione):*

$$x(t) = y(t) + \mu \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s}; \quad |\mu| \neq 1$$

$$y(t) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + t^2}.$$

Esercizio 8 *Sviluppare in serie di Fourier in $[-1, 1]$ la funzione $f(x) = |cos(\pi x)|$.*

Esercizio 9 *Dato in l_2 l'operatore "triangolare":*

$$y_n = (Ax)_n = \alpha^n x_n + \sum_{k=1}^{r} a_{nk} x_{n+k} \qquad |\alpha| < 1$$

dimostrare che $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$ sono autovalori di A e che 0 è un punto dello spettro.

Compito di MMF del 23/01/2001: II modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Data la funzione* $f(x) = x^2 + 2x$ *si determini, in* $(0, \pi)$*, il suo sviluppo in serie di Fourier termini di*

1. *soli seni;*
2. *soli coseni;*
3. *seni e coseni.*

Esercizio 2 *La temperatura,* $T(x,t)$*, di una sbarra metallica lunga* L*, è regolata dall'equazione di diffusione*

$$\partial_t T = \mathrm{D}\partial_{xx} T.$$

Gli estremi della sbarra sono tenuti a temperatura nulla. All'istante $t = 0$*, la temperatura,* $T(x,0)$*, è data da, con* $0 < a < L$*,*

$$T(x,0) = \begin{array}{cc} 0 & 0 < x < (L-a)/2 \\ L/a & (L-a)/2 < x < (L+a)/2 \\ 0 & (L+a)/2 < x < L. \end{array}$$

Si chiede di determinare $T(x,t)$*.*

Esercizio 3 *Calcolare la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{\sin[a(x-y)]}{x-y} \frac{1}{y^2+b^2},$$

dove a *e* b *sono reali e positivi.*

Esercizio 4 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale*

$$\partial_{xx} G - \frac{2}{x}\partial_x G + \frac{2}{x^2} G = \delta(x-y)$$

regolare per $x \in [1,2]$*, che soddisfa le condizioni al contorno:*

$$G(1,y) \quad = \quad G(2,y) \quad = \quad 0.$$

Suggerimento: si cerchino le soluzioni dell'equazione omogenea sotto forma di potenza (x^α)*.*

Esercizio 5 *Nello spazio delle successioni doppiamente infinite di modulo quadro sommabile, munite della norma:*

$$||x|| = (\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|^2)^{1/2} \tag{1}$$

si consideri l'operatore:

$$K : x_n \to y_n = \sum_{m=-\infty}^{n} k^{|n-m|} x_m \quad ; \quad o < k < 1 \tag{2}$$

a) Dimostrare che K è limitato, con $||K|| \leq \frac{1+k}{1-k}$.
b) Introducendo la "z-trasformata di una successione (e la corrispondente anti-trasformata) mediante le formule:

$$\hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{-n} x_n$$

$$x_n = (2\pi i)^{-1} \oint_{|z|=1} dz z^{n-1} \hat{x}(z)$$

dimostrare la formula:

$$\hat{y}(z) = \hat{K}(z)\hat{x}(z)$$

con

$$\hat{K}(z) = \frac{k - k^{-1}}{(z-k)(z-k^{-1})}$$

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\lim_{\epsilon\to 0} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{exp(ix/\epsilon)}{x} \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(sinx) exp(-|x|)$$

Compito di MMF del 29/01/2001: I modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Determinare la funzione razionale* $f(z)$ *che:*
a) ha un polo semplice in $z = 0$ *con residuo 1 e un polo doppio in* $z = 1$ *con residuo 0.*
b) ha uno zero doppio in $z = -1$ *e uno zero semplice in* $z = i$.
c) e' tale che $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$.

Esercizio 2 *La matrice* A *ha autovalori* $\lambda_1 = 1/6, \lambda_2 = 1/3, \lambda_3 = 3/2$ *e autovettori* $|v_1 >= (\sqrt{2})^{-1}(0, -i, i), |v_2 >= (\sqrt{2}))^{-1}(0, 1, 1)), |v_3 >= (1, 0, 0)$. *Calcolare la funzione di matrice* $f(A)$ *data dalla rappresentazione integrale:*

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \oint_{|z|=1} dzexp(-z)(zI - A)^{-1}$$

Esercizio 3 *Dimostrare la formula*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j\right) = (\pi)^{N/2} (\mathrm{Det} A)^{-1/2} \tag{3}$$

nel caso in cui A *è una matrice reale e simmetrica. Si suggerisce di scrivere l'argomento dell'esponenziale in termini del prodotto scalare*

$$\sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \tag{4}$$

dove $\mathbf{x}$ *è un vettore con componenti* x_1, x_2 *etc.*

Compito di MMF del 29/01/2001: II modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Si determini lo sviluppo in serie di Fourier complessa della funzione* $f(x) = \exp(\mathrm{i}\beta x)$ *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$, *dove* β *è reale positiva. Utilizzando l'identità di Parseval dimostrare la formula*

$$\frac{1}{\sin(x)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x - \pi n)^2} + \frac{1}{(x + \pi n)^2} \right)$$

Esercizio 2 *Determinare la successione di funzioni* $\theta_n(x)$ *definite iterativamente dalla relazione:*

$$\theta_n(x) = \theta \star \theta_{n-1}; ....\theta_0(x) = \theta(x) \tag{5}$$

dove $\theta(x)$ *e' la funzione a gradino.*

Esercizio 3 *Gli operatori* b *e* $b^\dagger$ *sono definiti mediante la loro azione su una base ortonormale in* l_2*:*

$$b|e_n >= (n-1)^{1/2}|e_{n-1} > \tag{6}$$

$$b^\dagger|e_n >= n^{1/2}|e_{n+1} >; n = 1, 2, ... \tag{7}$$

Dimostrare che;
a) che $b^\dagger$ *e' effettivamente l'hermitiano coniugato di* b*;*
b) che lo spettro (discreto!) di b *e' l'intero piano complesso* λ*;*
c) che $b^\dagger$ *non ha autovalori.*

Compito di MMF del 19/02/2001: I modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)\sin^3 z.$$

Calcolare

$$\oint_{|z|=1} dz z^2 f(z).$$

Esercizio 3 *(a) Dato il sistema di equazioni matriciali:*

$$\begin{aligned}\dot{P} &= [A, P] + \lambda Q \\ \dot{Q} &= [A, Q] + \lambda P\end{aligned}$$

con A matrice costante, dimostrare che la soluzione, corrispondente ai dati inziali $Q(0), P(0)$, vale:

$$\begin{aligned}P(t) &= \exp(At)\left(P(0)\cosh(\lambda t) + Q(0)\sinh(\lambda t)\right)\exp(-At) \\ Q(t) &= \exp(At)\left(Q(0)\cosh(\lambda t) + P(0)\sinh(\lambda t)\right)\exp(-At)\end{aligned}$$

(b) Indicando con L il commutatore $[P, Q]$, dimostrare che esso e' costante se e solo se si ha $[L(0), A] = 0$.

Compito di MMF del 19/02/2001: II modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$ *in* $L^2_{[-\pi,\pi]}$*:*

$$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} ds K(t,s) x(s)$$
$$K(t,s) = \theta(t-s)(\pi+s)(\pi-t) + \theta(t+s)(\pi-s)(\pi+t)$$

(a) determinare gli elementi di matrice di $\mathbf{K}$ *nella base di Fourier*

$$e_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{(2\pi)}},$$

cioè le quantità $K_{n,m} = (e_n, \mathbf{K} e_m)$.
(b) Calcolare $Tr\mathbf{K} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,n}$*, utilizzando la formula* $Tr\mathbf{K} = \int_{-\pi}^{\pi} dt K(t,t)$.

Esercizio 2 *Si calcoli la norma in* $L^2_{[-\infty,+\infty]}$ *dei funzionali lineari* D_n *definiti dalla formula:*

$$D_n(f) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-n^2 t^2\right) f(t).$$

Esercizio 3 *L' operatore di Hilbert* H *è definito dalla relazione:*

$$(Hf)(x) = (i\pi)^{-1} P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}$$

Usando la trasformata di Fourier, dimostrare che vale l'identità $H^2 = I$*, cioè:* $H(Hf) = f \quad \forall f$ *(naturalmente, le funzioni* f *debbono appartenere a* L^1 *e soddisfare la condizione del Dini).*

Compito di MMF del 11/06/2001: I modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale* ($q \neq 1$)*:*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{\sin(nt)}{1 + q^2 - 2q\cos(t)}.$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

nell'intorno di $z = 1, z = \omega = exp(2\pi i/3), z = \omega^2$*, specificando in ognuno dei 3 casi il dominio di convergenza.*

Esercizio 3 *Calcolare la funzione di matrice* $exp(A)$*, dove*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il risultato per calcolare la soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = (1, 1, 1).$$

Compito di MMF del 11/06/2001: II modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{nt\cos(nt)-\sin(nt)}{\pi t^2((t+1)^2+a^2)}.$$

Esercizio 2 *Si determinino autovalori e autofunzioni dell'operatore* $x\frac{d}{dx}$ *sulla varieta' lineare delle funzioni (sufficientemente regolari) che soddisfano la condizione al contorno* $f(-1)=f(1)$.

Esercizio 3 *Con riferimento all'esercizio precedente, determinare, sulla medesima varieta' lineare, la funzione di Green dell'operatore* $x\frac{d}{dx}-\lambda$.

Compito di MMF del 10/09/2001: I modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale :*

$$I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/2} \log(x)}{x^2+1}.$$

Esercizio 2 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che è una funzione analitica in tutto il piano complesso, ad eccezione del punto all'infinito, in cui ha un polo del II ordine, e delle radici quadrate di -1, in cui ha poli semplci con residui ± 1, e che per essa valgono le formule*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$

Esercizio 3 *La matrice (ciclica) A, agente sullo spazio euclideo complesso tridimensionale $\mathbf{E}^3$, e' determinata dalla sua azione su una base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:*

$$A\vec{e}_i = \vec{e}_{i+1} \quad (mod\ 3)$$

Se ne calcolino autovalori e autovettori, e si determini la forma esplicita della matrice 3×3 $\exp(A)$.

Compito di MMF del 10/09/2001: II modulo

O. Ragnisco, R. Raimondi

Esercizio 1 *Calcolare la serie di Fourier della funzione:*

$$f(x) = \exp(\alpha|x|); \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Utilizzare il risultato per determinare la serie di Fourier di $|x|$.

Esercizio 2 *Si determinino autovalori e autofunzioni dell'operatore* $x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx}$ *sulla varieta' lineare delle funzioni (sufficientemente regolari) che soddisfano le condizioni al contorno* $f(-1) = f(1) = 0$ *(suggerimento: cercare le soluzioni dell'equazione agli autovalori nella forma* x^α*, con* α *da determinare).*

Esercizio 3 *Determinare il limite nel senso delle distribuzioni della successione :*

$$D_n(x) = \int_{-n}^{n} dk \cos(kx) \, .$$

.

Esercitazione di MMF del 03/10/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dire se le funzioni di variabile complessa:*

$$F_1(z) = \frac{x + 3iy}{x^2 + y^2},$$
$$F_2(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

sono analitiche.

Esercizio 2 *Determinare la famiglia di funzioni analitiche la cui parte reale e' data da:*

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 3 *Trovare la trasformazione conforme che manda i cerchi*

$$|z - a| = r; \qquad |z + a| = r$$

nei cerchi concentrici:

$$|w - b| = R_1; \qquad |w - b| = R_2$$

Esercizio 4 *Integrare le funzione* $|z|$ *sullo spicchio di cerchio delimitato dal segmento di estremi* 0 *e* R *dell'asse reale e dalla bisettrice del I quadrante.*

Esercizio 5 *Integrare la funzione* $f(z) = 1/\bar{z}$ *sul cammino dato dalla circonferenza di centro O e raggio 2.*

Soluzioni

1. La funzione (1) non e' analitica; infatti si puo' scrivere come:

$$F_1(z) = 2/\bar{z} - 1/z$$

Invece, la funzione (2) e' analitica in ogni dominio privato dell'origine; infatti si puo' scrivere come:

$$F_2(z) = 1/z$$

2. Ricollegandoci all'esercizio precedente, basta osservare che $f(z)$ e' la parte reale della funzione $F_2(z)$, e quindi la famiglia di funzioni in questione e' data da:

$$F(z) = 1/z + iC; \quad C \in \mathbf{R}$$

3.

4. Possiamo scrivere:

$$\oint_\gamma dz|z| = \tag{8}$$

$$\int_0^R drr + i\int_0^{\pi/4} d\phi R^2 \exp(i\phi) + \int_R^0 drr \exp(i\pi/4) \tag{9}$$

che ci da come risultato:

$$(i-1)R^2/\sqrt{2}$$

5. Usando coordinate polari, l'integrale da calcolare si scrive:

$$\int_0^{2\pi} i \exp(2i\phi) d\phi$$

che quindi vale ovviamente 0.

Esercitazione di MMF del 19/10/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 4}$$

nelle regioni:

$$|z| < 1$$
$$1 < |z| < 4$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I \quad = \quad P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(ikx)}{x^4 - 1}.$$

Esercizio 3 *Determinare* $Res_{z=a}[f(g(z))]$*, sapendo che* $g(z)$ *è analitica in* $z = a$*, con derivata prima diversa da* 0*, mentre la funzione* $f(\zeta)$ *ha un polo del 1 ordine in* $\zeta = g(a)$*, il cui residuo vale* A*.*
Risposta: il residuo vale $\frac{A}{g'(a)}$*.*

Esercizio 4 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_\gamma dz \frac{\cos z}{z^2(z-1)}$$

dove γ *è la curva chiusa orientata positivamente, e così definita: (i)* $|z| = 1/3$*; (ii)*$|z-1| = 1/3$*;* $|z| = 2$*.*

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}$$

nella regione $1 < |z| < 3$*.*

Esercitazione di MMF del 26/10/01

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I \quad = \quad P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{x^2-4}.$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I \quad = \quad \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\exp(ikx)}{x^4+1}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{(\beta+e^x)(1+e^{-x})}.$$

Si consiglia un cambiamento di variabile.

Esercizio 4 *Data le funzione:*

$$f(z) \quad = \quad \frac{\sin z}{z^3}$$

1. *Se ne classifichino le singolarita', tenendo anche conto del punto all'infinito*
2. *Se ne costruisca lo sviluppo di Laurent in $z = 0$, indicandone il dominio di convergenza.*

Esercizio 5 *Determinare le funzioni $F^{(e)}(z)$ e $F^{(i)}(z)$, analitiche rispettivamnete all'esterno e all'interno della circonferenza di centro origine e raggio 1, e tali che:*

$$\lim_{z\to 1} F^{(e)}(z) - F^{(i)}(z) = \operatorname{Re} z.$$

Esercitazione di MMF del 02/11/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sia:*

$$F_n(z) = \int_0^\infty dt\, t^n \exp(-zt)$$

Dire in quale dominio del piano complesso vale l'uguaglianza:

$$F_n(z) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} F_0(z)$$

Qual e' il risultato?

Esercizio 2 *Determinare l'espansione in fratti semplici della funzione:*

$$f(z) = cotg(z) - 1/z$$

Assumendo l'uniforme convergenza, utilizzare il risultato per dimostrare la formula:

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(z - n\pi)^2)} + \frac{1}{(z + n\pi)^2})$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1}$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\exp(\alpha t)}{\sinh t}$$

Esercizio 5 *Dimostrare che la funzione:*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\exp(-|t|)}{t - z}$$

e' analitica per z non appartenente a $\mathbb{R}$ e calcolarne la discontinuita' sull'asse reale:

$$\Delta F(t) = \lim_{\epsilon \to 0} F(t + i\epsilon) - F(t - i\epsilon)$$

Esercitazione di MMF del 09/11/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dimostrare che la funzione di variabile complessa:*

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{\exp(-zt)}{1+t^2}$$

e' analitica per Re$z > 0$. *Assumendo* z *reale* ($z = x$), *determinare lo sviluppo asintotico di* $F(z)$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \frac{\exp(\alpha x)}{\cosh x}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$J(a,b) = \int_a^b dx (b-x) \ln(\frac{b-x}{x-a}) : \qquad a \ < \ b.$$

Esercizio 4 *Determinare la funzione di variabile complessa* $f(z)$ *che gode delle seguenti proprieta':*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*
2. *si annulla all'infinito ed e' analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti* z_k *tali che* $z_k^3 = 1$ *dove ha poli semplici;*
3. *il suo residuo all'infinito vale* -1.

I Esonero di MMF del 16/11/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare la somma:*

$$S_N(\alpha) \;=\; \sum_{k=1}^{N-1} k\cos[(k-1)\alpha]2^{-k}$$

Discutere le proprietà di analiticità di $S(\alpha) \;=\; \lim_{N\to\infty} S_N(\alpha)$.

Esercizio 2 *Calcolare con il metodo di Laplace il termine dominante dell'andamento asintotico per grandi* x *dell'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dt\,\exp[-x(t + a^2/t)]$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{\cos(kx) - 1}{\sinh^2(x)}$$

Esercizio 4 *Calcolare la successione di funzioni* $I_n(\rho)$ *definite dalla formula:*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)}$$

Esercitazione di MMF del 29/11/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$\dot{X} = [P, X]$$

dove P *e' una matrice idempotente* ($P^2 = P$)*. Specializzare la soluzione al caso particolare* $X(0) \;=\; \sigma_3$*.*

Esercizio 2 *Sia* A *una matrice che soddisfa l'equazione caratteristica* $A^3 \;=\; I$*. Dire per quali valori di* z *e' definita la funzione di matrice*

$$f(A; z) \;=\; (I - zA)^{-1}$$

e trovarne l'espressione equivalente in termini di $I,\; A,\; A^2$*. Specializzare l'espressione al caso particolare* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3 *Si consideri la matrice di Pauli* σ_3 *e, nello spazio lineare* $M_2(\mathbf{C})$ *delle matrici* 2×2 *ad elementi complessi si introduca l'operatore:*

$$A : X \to Y \;=\; [\sigma_3, X]$$

Si determinino $Ker_A = \{X \;:\; [A, X] \;=\; 0\}$ *e* R_A *(range di* A*)* $= \{Y : \; Y = [A, X]$ *per qualche* $X \;\in M_2(\mathbf{C})\}$*.*

Esercizio 4 *Sia* $S(a)$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $T(a)$ *la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Dimostrare che:*

$$T(a) = \exp[S(a)]$$
$$T(a)T(b) \;=\; T(a+b)$$
$$T^{-1}(a) \;=\; T(-a)$$

Esercizio 5 *Sia* N *una matrice* $n \times n$*, nilpotente di grado* k *(cioe' tale che* $N^k \;=\; 0,\; N^r \neq 0,\; r < k$*). Data*

$$A = I + \alpha N$$

scrivere $\exp(A)$ *in funzione delle potenze di* N*. Estendere la formula al caso di* $f(A)$*, con* $f(z)$ *intera.*

Esercitazione di MMF del 07/12/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sia* $\{\vec{e}_i\}$ $(i = 1,2,3)$ *una base ortonromale in* $\mathbf{E}^3$. *Per quali valori di* α, β, γ *l'operatore* U *definito dalle relazioni:*

$$\begin{aligned} U\vec{e}_1 &= \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ U\vec{e}_2 &= \beta\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \\ U\vec{e}_3 &= \gamma\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{aligned}$$

e' unitario ed ha uno degli autovalori uguale a 1 *? Determinare inoltre l'autovettore associato al suddetto autovalore.*

Esercizio 2 *Sia* A *una matrice* $N \times N$ *dotata della rappresentazione spettrale:*

$$A = \sum_{k=1}^{N} (k - 1/2) P^{(k)}$$

dove ovviamente $P^{(k)}P^{(l)} = \delta_{k,l}P^{(l)}$ *e* $\sum_{k=1}^{N} P^{(k)} = I$. *determinare le proprieta' di analiticita' della successione di funzioni:*

$$f^{(N)}(z) = Tr \exp(zA)$$

indicando il dominio di convergenza della successione e calcolandone il limite.

Esercizio 3 *Il vettore* $\vec{J} \in \mathbf{E}^3$ *precede sotto l'azione di un campo esterno* $\vec{H}$ *secondo la ben nota equazione:*

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \lambda \vec{H} \wedge \vec{J}$$

Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $\vec{J}|_{t=0} = \kappa\vec{e}_1$. *Usare la corrispondenza tra vettori di* $\mathbf{E}^3$ *e matrici* 2×2 *a traccia nulla data dalla rappresentazione di Pauli.*

Esercitazione di MMF del 14/12/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sia A una matrice $N \times N$ dotata della rappresentazione spettrale:*

$$A = \sum_{n=1}^{N} (n - 1/2) P^{(n)}$$

$$P^{(n)} P^{(m)} = \delta_{nm} P^{(n)}; \quad \sum_{n=1}^{N} P^{(n)} = I$$

Calcolare $det \exp(zA)$ e $tr \exp(zA)$. Studiare le prorieta' di analiticità della successione di funzioni $f^{(N)}(z) = tr \exp(zA)$ e determinare il dominio del piano complesso in cui la successione e' (assolutamente) convergente, indicandone anche il limite.

Esercizio 2 *Risolvere con il metodo della aprrossimazioni successive l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^t ds (t - s) x(s)$$

Si consiglia di porre $\lambda = -\mu^2$. Potete suggerire ed eventualmente applicare un altro metodo di soluzione?

Esercizio 3 *La matrice A agisce sui vettori di una base ortonormale $\vec{e}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ secondo la legge:*

$$A\vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(1)}$$
$$A\vec{e}^{(2)} = \vec{e}^{(1)} + 2\vec{e}^{(2)}$$
$$A\vec{e}^{(3)} = \vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)} + \vec{e}^{(3)}$$

Trovare autovalori e autovettori di A e scriverne la decomposizione spettrale.

Esercizio 4 *Considerare la coppia di equazioni matriciali:*

$$\frac{dL}{dt} = [L, A]$$
$$\frac{dM}{dt} = [M, A] + \{M, L\}$$

dove L, M, A *sono matrici* $N \times N$ *e* A *e' indipendente da* t.
Risolvere il sistema, con le condizioni iniziali

$$L(0) = L_0; \quad M(0) = M_0$$

dimostrando in particolare che (i) gli autovalori di L *sono costanti e (ii) gli autovalori di* M *sono gli autovalori di* $\exp(L_0 t) M_0 \exp(L_0 t)$.

Esercizio 5 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

agente sullo spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ *dimostrare che:*

$$Ker_A = \{\vec{x} : \ x_1 = \alpha, \ x_2 = -\alpha, x_3 = \alpha \ \ \textit{per qualche } \alpha \in \mathbf{R}\}$$
$$R_A = \{\vec{x} : x_1 = \beta, x_2 = \beta + \gamma, x_3 = \beta\gamma, \ \ \textit{per qualche } \beta, \ \gamma \in \mathbf{R}\}$$

Verificare inoltre la proprietà:

$$R_A \oplus Ker_{A^\dagger} = \mathbf{R}^3$$

Esercitazione di MMF del 20/12/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *A che cosa converge (nel senso delle distribuzioni) la successione*

$$f_n(x) \;=\; (\alpha \exp(nx) + 1)^{-1}; \quad \alpha > 0$$

quando $n \to \infty$ *?*

Esercizio 2 *Dimostrare che la distribuzione*

$$D(x) = a\theta(x) + b \ln |x|$$

è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xD'(x)) = 0.$$

Esercizio 3 *Trovare massimo e minimo della funzione:*

$$F(x, y, z) \;=\; 2(x^2 + y^2) + 3z^2 + 2^{3/2} yz$$

sulla sfera di raggio 2*.*

Esercizio 4 *In* l_2 *si consideri la successione di funzionali lineari dati da:*

$$f^{(n)}(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha^l x_l : \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

Si dimostri:

- *per* $\alpha < 1$ *la successione converge in norma a* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^l x_l$*; si calcoli* $||f||$
- *per* $\alpha > 1$ *la successione diverge in norma.*

Esercizio 5 *Si calcoli il limite, nel senso delle distribuzioni, della successione*

$$f_n(t) = \frac{n^2}{2} \mathrm{sgn}(t) \exp(-n|t|)$$

Come spazio di funzioni di prova, si prenda ad esempio lo spazio delle funzioni assolutamnte integrabili sulla retta e continue nell'origine insieme alle loro derivate prime.

Esercitazione di MMF del 16/01/2002

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Si dimostri che in un opportuno spazio di funzioni di prova vale la relazione:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \exp(int) = -2\pi\delta''(t)$$

Esercizio 2 *Dato l'operatore differenziale:*

$$L_x = x^2 D^2 - 3xD; \qquad D = \frac{d}{dx}$$

che agisce sulla varieta' lineare delle funzioni che obbediscono alle condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$,

- *se ne determini la funzione di Green;*
- *se ne calcolino autovalori e autofunzioni.*

Suggerimento: si cerchino le soluzioni $u(x)$ *dell'equazione omogenea* $L_x u(x) = 0$ *nella forma* $u(x) = x^\alpha$.

Esercizio 3 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \delta(1 - x^2)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esercizio 4 *Sia dato l'operatore lineare* $L_x = -D^2$ *sulla varieta' lineare delle funzioni* $f(x)$ *tali che* $f(-1) = f(1) = 0$.

- *trovarne autovalori e autofunzioni;*
- *determinarne la funzione di Green* $G(x, \xi)$*;*
- *indicando con* $\hat{G}$ *il corrispondente operatore integrale, utilizzare la proprieta'*

$$Tr\hat{G} = \int_{-1}^{1} dx G(x, x)$$

  per calcolare $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 5 *Sulla varieta' lineare, densa in* $L_{2[-\pi,\pi]}$ *delle funzioni tali che* $f(\pi) \;=\; f(-\pi)$ *(prolungate per periodicita' su tutta la retta reale), si consideri l'operatore di traslazione* T*, definito dalla relazione:*

$$(Tf)(x) \quad = \quad f(x+1)$$

- *si dimostri che* T *e' unitario;*
- *Se ne calcolino autovalori e autofunzioni (suggerimento: cercare le soluzioni di* $f(x+1) \quad = \quad \lambda f(x)$ *in forma esponenziale.*

Esercizio 6 *In un generico spazio normato completo si consideri la successione di operatori:*

$$A_n \;=\; I \;+\; \alpha^n B$$

dove B *e' un operatore limitato e* α *e' un numero complesso. Per quali valori di* α *la successione converge? Qual e' il limite della successione?*

Esercizio 7 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$A \;=\; id/dx + x$$

sulla varieta' lineare D_A*, densa in* $L_{2[-\pi,\pi]}$ *delle funzioni* $f(x)$ *tali che* $f(-\pi) = f(\pi)$*. Determinare il risolvente* $(A - \lambda I)^{-1}$ *in uno dei due modi seguenti:*

- *utilizzando la decomposizione spettrale;*
- *risolvendo in* D_A *l'equazione differenziale*

$$(A - \lambda I)G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

II Esonero di MMF del 25/01/2002

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione* x^2 *nell'intervallo* $[0, 2\pi]$.

- *Lo sviluppo e' uniformemente convergente in* $[0, 2\pi]$*?*
- *A che cosa converge la serie di Fourier agli estremi dell'intervallo?*
- *Utilizzare lo sviluppo per dimostrare che* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Esercizio 2 *Dimostrare la formula:*

$$\lim_{n\to\infty} (n/2) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(\cosh[n(t-2)])^2} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{5}$$

Esercizio 3 *Trovare l'***unica** *soluzione dell'equazione integrale:*

$$x(t) = a + bP \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{x(s)}{\sinh(t-s)}$$

Esercizio 4 *Determinare la funzione di Green dell'operatore* L_x *definito come:*

$$(L_x f)(x) = f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\beta^2}{x^2} f(x)$$

sulla varieta' lineare delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$.
Suggerimento: cercare le soluzioni dell'equazione omogenea nella forma $f(x) = x^\gamma$.

Compito di MMF del 28/01/2002 – primo modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quali valori del parametro α le seguenti funzioni possono essere considerate la parte reale di una funzione analitica?*

1. $u_1(x,y) = \cosh(x)\cos(\alpha y)$
2. $u_2(x,y) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2}$

Esercizio 2 *Classificare le singolarità (inclusi i punti di diramazione) della funzione:*

$$f(z) = \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{sech}\, z.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}.$$

Esercizio 4 *Calcolare il termine dominante nello sviluppo asintotico per $\lambda \to \infty$, dell'integrale:*

$$I(\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda(t^2-a^2)^2}$$

Compito di MMF del 28/01/2002 – secondo modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare minimo e massimo della funzione:*

$$F(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{3}{2}\mathrm{Im}(\bar{x}_2 x_3)$$

sulla sfera di raggio 2.

Dire in quali direzioni si raggiungono $\max F$ *e* $\min F$.

Esercizio 2 *Dato in* l^2 *l'operatore*

$$A : \underline{x} \to \underline{y} \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha x_2 \\ y_n = \alpha^n x_{n+1} + \alpha^{n-1} x_{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

1. *Dimostrare che* A *è hermitiano per* $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. *Dimostrare che per* $|\alpha| > 1$ A *non è limitato.*
3. *Dimostrare che* $\mathrm{Ker}\, A \neq 0$ *per* $|\alpha| > 1$.

Esercizio 3 *Calcolare autovalori e autofunzioni di*

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle v| - |v\rangle\langle u|,$$

dove $|u\rangle$ *e* $|v\rangle$ *sono ortonormali.*

Esercizio 4 *Trovare l'unica soluzione dell'equazione integrale:*

$$x(t) = a\theta(t) + b\int_{-\infty}^{t} x(s); \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Compito di MMF del 18/02/2002 – primo modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *$f(z)$ è analitica in un anello di centro O e contenente al suo interno il cerchio unitario ($|z| = 1$). Quali condizioni debbono essere soddisfatte dai coefficienti del suo sviluppo di Laurent intorno a $z = 0$ affinché $f(z)$ assuma valori reali per $|z| = 1$?*

Esercizio 2 *Determinare $g(z)$ tale che:*

1. *ha un polo semplice in z_0;*
2. *ha uno zero semplice in z_0^{-1};*
3. $\lim_{z\to\infty} g(z) = 1$.

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x^2 + a^2}.$$

Esercizio 4 *Qual è, per $\lambda \to +\infty$, il termine dominante dell'integrale:*

$$I(\lambda) \int_0^{\infty} dt \frac{e^{\lambda \sin^2\left(\frac{2t}{\pi}\right)}}{1 + t^2}?$$

Compito di MMF del 18/02/2002 – primo modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *B è una matrice nilpotente di grado* 3 *($B^3 = 0$). Scrivere in funzione di $\mathbb{I}$ e delle potenze di B la matrice*

$$X = \exp\left(\mathbb{I} + \alpha B + \alpha^2 B^2\right).$$

Specializzare il risultato al caso di matrici3×3 *con*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 *La funzione $f(x)$ vale x in $[0, 1]$. Svilupparla in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $[-1, 1]$.*

Esercizio 3 *Sia A un operatore (limitato) su $\mathcal{H}$ e $A^\dagger$ il suo aggiunto.*

1. *Dimostrare che $AA^\dagger$ e $A^\dagger A$ sono autoaggiunti e definiti positivi.*
2. *Dimostrare che, se $\operatorname{Ker} A = 0$, $AA^\dagger$ e $A^\dagger A$ hanno gli stessi autovalori, e determinare l'operatore che trasforma i corrispondenti autovettori.*

Esercizio 4 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = a\delta(t) + bP \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{x(s)}{t - s}.$$

Compito di MMF del 28/01/03

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare (sotto forma di serie) l'integrale*

$$J(x) = \int_0^\pi d\theta \exp(ix\cos\theta)$$

Esercizio 2 *Si consideri l'integrale, simile al precedente:*

$$K(x) = \int_0^\pi d\theta \exp(x\sin\theta)$$

Si trovi la serie che lo rappresenta (analoga alla prima) e si determini poi, usando il metodo di Laplace, il termine dominante del suo sviluppo asintotico per grandi x.

Esercizio 3 *Si ricostruisca la funzione razionale $f(z)$, sapendo che:*

- *$f(0)$ vale 1;*
- *la funzione ha due poli, uno semplice in $z=-1$, con residuo 1, e uno doppio, in $z=1$, con residuo pure uguale a 1;*
- *la funzione tende al valore 2 per $z \to \infty$.*

Esercizio 4 *Il vettore $\vec{v}(z)$ ha componenti $(1, 2z, 3z^2, \ldots, nz^{n-1}, \ldots)$. Si calcoli, se possibile, la traccia della matrice*

$$A \equiv v(\vec{z}) v^\dagger(\vec{z})$$

o quantomeno si indichi il dominio in cui essa e' convergente.

Esercizio 5 *Si calcoli l' integrale:*

$$\int_0^{n\pi} dx \delta(\sin x)\exp(-x)$$

Esercizio 6 *La temperatura di una sbarra infinita e' inizialmente descritta dalla funzione oscillante $u(x,0) = u_0\sin(x\lambda)$. Si calcoli la distribuzione di temperatura ad un istante generico t, sapendo che l'evoluzione e' descritta dall'equazione:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Compito di MMF II del 1/12/03

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) \;=\; \int_0^\infty dt \frac{\exp(zt)}{(\cosh t)^2}$$

e discuterne le proprietà di analiticità in z.

Esercizio 2 *Calcolare il seg. integrale:*

$$I_1 \;=\; \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha \log x}{x^2+1} \quad (1 > \alpha > 0)$$

Esercizio 3 *a) Sia*

$$F(x) \;=\; \int_0^\infty dt \; \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh t}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x.

b) Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominanteper grandi x *e* t*, nella direzione* $x/t \;=\; cost. = v$*, dell'integrale*

$$I(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{\cosh k}$$

Esercizio 4 *Risolvere l'equazione integrale di Fredholm:*

$$x(t) \;=\; sint + \lambda(\int_0^t \; t(1-s)x(s)ds + \int_t^1 \; s(1-t)x(s)\; ds)$$

Suggerimento: trasformare, derivando due volte, l'equazione integrale in una equazione differenziale; osservare che l'equazione integrale "ingloba" le condizioni al contorno $x(0) \;=\; ...;\; \dot{x}(0) \;=\; ....$

Esercizio 5 *Si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$ *introdotto nell'esercizio precedente, definito dalla formula:*

$$\mathbf{K}x(t) \ := \ \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \ = \ \int_0^t \ t(1-s)x(s)ds + \int_t^1 \ s(1-t)x(s) \ ds$$

Trovare le soluzioni dell'equazione agli autovalori:

$$\mathbf{K}x(t) \ = \ \mu x(t); \quad x(0) \ = \ x(1) \ = 0$$

Calcolare la serie numerica data dalla somma degli autovalori, vale a dire la traccia τ *dell'operatore* $\mathbf{K}$*, sapendo che vale la formula:*

$$\tau \ = \ \int_0^1 dt K(t,t)$$

Esercizio 6 *Usando la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integrale:*

$$F(x) = \ a \ + \ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \ F(x-y\frac{\cos(\alpha(x-y)x)}{\cosh(x-y))}$$

Esonero di MMF II del 13/02/04

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione integrale (di Volterra)*

$$x(t) \;=\; \sin t + \int_0^t \cosh(t-s)\; x(s)\; ds$$

Suggerimento: ottenere per derivazioni successive una equazione differenziale del II ordine per $x(t)$, non omogenea; cercarne una soluzione particolare nella forma $x_p(t) \;=\; C\cos t + S\sin t$; osservare che l'equazione integrale assegnata "contiene già le condizioni iniziali" dell'equazione differenziale ad essa associata, in modo tale che la soluzione e' effettivamente unica (come deve essere).

Esercizio 2 *Risolvere l'equazione integrale di Fredholm:*

$$x(t) \;=\; sint + \lambda \int_0^1 \cosh\;(t-s)x(s)ds$$

Suggerimento: Osservare che il nucleo e' degenere, per cui il problema si riduce ad un problema algebrico (lineare).

Esercizio 3 *Risolvere mediante la trasformata di Fourier l'equazione integrale:*

$$F(x) = \;a\; + \;\int_{-\infty}^{+\infty} dy\; \frac{F(y)}{\cosh(x-y)}$$

Esercizio 4 *I. Trovare gli autovalori λ_n e le autofunzioni ϕ_n dell'operatore $\mathcal{L} := D^2 \;+\; D \;+\; 1$, nello spazio delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno: $f'(0) \;=\; f'(1) \;=\; 0$:*

$$f''(x) \;+\; f'(x) + \;f(x) \;=\; \lambda f(x); \;\; f'(0) \;=\; f'(1) \;=\; 0.$$

II. Calcolare per l'operatore suddetto la funzione di Green che soddisfa le medesime condizioni al contorno

III. Dimostrare che vale la formula

$$G(x,\xi) \;=\; \sum_n \phi_n(x)\bar{\phi}_n(\xi)(\lambda_n)^{-1}$$

Compito di MMF I del 07/12/2004:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

con la condizione iniziale $\vec{x} = (1, 0, 0)^T$ *essendo* A *la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq \beta$*.*
Porre ad es. $A = \alpha I + B$*, in modo tale che il problema è essenzialmente ridotto al calcolo delle potenze di* B*.*

Esercizio 2 *Sia* A *una matrice* $N \times N$ *avente come autovalori i numeri interi* $1, 2, \cdots, N$*. Calcolare la funzione di variabile complessa* $F(z) := Tr \exp(-zA)$ *e discuterne le proprietà di analiticità.*

Esercizio 3 *La trasformata di Fourier* $f(k)$ *della gaussiana* $f(x) = \exp(-x^2)$ *vale* $(\pi)^{1/2} \exp(-\frac{k^2}{4})$ *(perché ?); utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier per Traslazioni e cambiamenti di scala calcolare la trasf. di Fourier di* $\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$

Esercizio 4 *Sia* L *una matrice con autovalori (semplici)* $-l, -l+1, ..., 0, 1, ..., l-1, l$*. Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} d\phi \; Tr \exp(-\phi L)$$

Esonero di MMF II del 21/12/04

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) \ = \ \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)}; \quad z \notin \mathbb{R}^+$$

e discuterne le proprietà di analiticità in z
Determinare il salto:

$$\Delta(t_0) := \lim_{\epsilon \to 0} F(t_0 + i\epsilon) - F(t_0 - i\epsilon)$$

Cosa si può dire in generale per un integrale del tipo:

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{f(t)}{t-z}$$

con $f(t)$ *assolutamente integrabile in* $\mathbb{R}^+$*?*

Esercizio 2 *Calcolare il seg. integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sin t}{t(t^4+1)}$$

Esercizio 3 *Calcolare il seguente integrale con un errore inferiore a* $\frac{1}{1000}$*:*

$$I \ = \ \int_0^\infty \frac{\exp(-1000t)}{1+t^3}$$

Esercizio 4 *La funzione* $f(z)$ *è continua e non nulla sulla curva chiusa* γ*, e nel dominio interno ad essa è analitica ovunque ad eccezione di un numero* P *di poli (non necessariamente distinti). Siano* N *i suoi zeri (anch'essi, non necessariamente distinti) Dimostrare la formula (teorema dell'incremento logaritmico):*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

Esercizio 5 *Risolvere l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = \exp(\alpha t) + \lambda \int_0^t ds \exp(t-s)x(s)$$

(a) riducendola ad una equazione differenziale (del I ordine !) con la condizione iniziale $x(0) = ...$
(b) con il metodo iterativo, partendo da $x^{(0)}(t) = \exp(\alpha t)$

Esercizio 6 *Nello spazio* l^2 *delle successioni di modulo quadrato sommabile(* $\vec{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$*) agisce l'operatore diagonale* A *secondo la legge:*

$$A := x_n \to y_n = \lambda^n x_n$$

Per quali valori del numero complesso λ A *è una contrazione?*

N.B.: si ricordi che la distanza in l^2 *è definita come:*

$$d^2(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|^2$$

Compito di MMF I del 11/01/2005:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Caratterizzare le curve di equazione* $u =$ *cost e quelle di equazione* $v =$ *cost associate alla funzione* $f(z) = Ln(z)$.

Esercizio 2 *Calcolare per* $\zeta \neq -1$ *l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\exp(in\theta)}{1 + \zeta \cos\theta}$$

Facoltativo Discutere le proprieta' di analiticità di $I(\zeta)$.

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz \frac{Rez}{4z^2 + 1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento $[-1, 1]$ *dell'asse reale e dalla semicirconfernza di centro* O *e raggio* 1 *del semipiano superiore, percorso in senso antiorario.*

Esercizio 4 *Calcolare il residuo in* $z = 0$ *delle seguenti funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}; \quad f_2(z) = \frac{1}{\sinh z} - \frac{1}{z}; \quad f_3(z) = \exp(1/z).$$

Utilizzare il risultato per calcolare gl'integrali $\oint_{|z|=3\pi/2} f_i(z)$.

Compito di MMF I del 11/01/2005:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Siano* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *una base ortonormale dello spazio euclideo complesso* E^3. *Per quali valori del parametro complesso* α *i 3 vettori:*

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{v}_2 = \alpha\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}_3 = \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

sono linearmente dipendenti?

Esercizio 2 *Determinare autovalori e autovettori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza ai valori del parametro α *che annullano il determinante della matrice.*

Esercizio 3 *Un momento di dipolo magnetico* $\vec{\mu}$ *immerso in un campo magnetico* $\vec{H}$ *precede secondo l'equazione del moto:*

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{H}$$

Determinare $\vec{\mu}(t)$ *assumendo* $\vec{H}$ *costante, uniforme e diretto secondo il vettore* $\vec{v}$ *di componenti* $(1, 1, 1)$, *e il momento magnetico diretto inizialmente lungo l'asse* x.

Esercizio 4 *Sia* L *una matrice con autovalori (semplici)* $0, 1, ..., l-1, l$. *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} d\phi \; Tr \cos(\phi L)$$

Compito di MMF II del 16/02/2005

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti 3 integrali:*

$$\int_0^\infty dx \frac{(\sqrt{x}) \log x}{1+x^2}$$
$$\int_{-a}^{b} dx x (\frac{b-x}{x+a})^{1/2}$$
$$P \int_o^\infty \frac{\cos x}{(\sinh(x-1))(\sinh(x+1))}$$

Esercizio 2 *Determinare il termine dominante per grandi x dell'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(ix\phi(t)) f(t)$$

con $\phi(t) = t^2 - a^2$, $f(t) = \frac{1}{\cosh t}$

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Volterra*

$$x(t) = \sin t + \lambda \int_0^t ds \cos(t-s) x(s)$$

ridurla a una equazione differenziale (ordinaria e lineare) con condizioni iniziali assegnate.

Esercizio 4 *La successione di funzioni* $\delta_n(x) = (n/2) \exp(-n|t|)$ *"tende" alla "delta" di dirac (perche'?). Sfruttando questa proprieta' calcolare:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n'(x) \exp[-(x-a)^2]$$

Esercizio 5 *L'operatore di abbassamento* E^- *agisce sulle successioni* l_2 *secondola legge*

$$E^- x_1 = 0; \quad E^- x_n = x_{n-1}$$

Applichiamolo n volte: quanto vale $\lim_{N\to\infty}((E^-)^N$*?*

Compito di MMF I del 11/04/2005:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Caratterizzare le curve di equazione* $u =$ *cost e quelle di equazione* $v =$ *cost associate alla funzione* $f(z) = z^2$.

Esercizio 2 *Calcolare per* $0 < a < 1$ *l'integrale:*

$$I(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\sin\theta}$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz \frac{Imz}{4z^2+1}$$

sul cammino chiuso, percorso in senso antitorario, costituito dal segmento che congiunge i punti diametralmente opposti $\exp(i\pi/4), \exp(i5\pi/4)$ *del piano complesso e da una semicirconferenza di centro* O *e raggio* 1.

Esercizio 4 *Costruire una funzione razionale di variabile complessa* $f(z)$ *che ha come uniche singolarità al finito due poli semplici nei punti* $\pm i$ *con residui pari a* $\pm\frac{1}{2i}$. *Usando il I teorema di Liouville, dimostrare che queste proprietà determinano* $f(z)$ *a meno di una costante.*

Compito di MMF I del 11/04/2005:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{X} = [A, X]$$

con la condizione iniziale $X(0) = diag(1, 0, -1)$, *dove* A *è la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq \beta$.

Esercizio 2 *Sia* $\{\vec{e}_j\}_{j=1,...N}$ *una base ortonormale nello spazio euclideo complesso a* N *dimensioni. Su questa base, l'operatore* U *agisce secondo la legge:*

$$U\vec{e}_j = \vec{e}_{j+1}; j = 1, ...N - 1$$

$$U\vec{e}_N = \vec{e}_1$$

Scrivere la matrice che rappresenta U *nella base in questione, dimostrare che è unitaria e che i suoi autovalori sono le radici* N*-esime dell'unità.*

Esercizio 3 *Calcolare la trasformata di Fourier* $\hat{f}(k)$ *della lorentziana* $f(x) = \frac{a}{x^2+b^2}$*; utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier per cambiamenti di scala calcolare la trasf. di Fourier di* $\frac{1}{x^2+1}$.

Esercizio 4 *Dimostrare che, per l'operatore* U *introdotto nel precedente esercizio 2, valgono le proprietà:*

$$detU = (-1)^N; \quad det\exp(U) = 1$$

Compito di MMF I del 13/09/2005:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quali valori reali di* α *la funzione*

$$u(x) \; = \; \cos x \cosh \alpha y$$

è la parte reale di una funzione analitica? E di quale funzione si tratta?
(4 pt)

Esercizio 2 *Calcolare per* $|\zeta| \neq 1 < 1$ *l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\exp(in\theta)}{1 - \zeta \exp(i\theta)}$$

(6 pt)

Esercizio 3 *Determinare la funzione razionale di variabile complessa* $f(z)$ *tale che:*

- $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1$
- *E' analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti* $z = \pm i$ *in cui ha poli del I ordine con residui* ± 1
- *Vale* 0 *per* $z = 0$.

(6 pt)

Compito MMF I del 06/12/2005:I modulo

O. Ragnisco

Esercizio 1 *Dimostrare che la famiglia di curve :*

$$r^n \cos(n\theta) = cost$$
$$r^n \sin(n\theta) = cost$$

costituisce una rete ortogonale.
(5 pt)

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{1 + 2\cos^2(\theta)}$$

(5 pt)

Esercizio 3 *Calcolare a scelta uno dei due integrali*

$$I_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(ikx)}{x^2 + x + 1} \quad (k \text{ reale})$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x + a}{x^4 + b^4} \quad (b > 0)$$

(5 pt)

Esercizio 4 *Usando la formula di Cauchy-Hadamard :*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

calcolare il raggio di convergenza della serie

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

(4 pt)
Fac. Dimostrare che vale l'equazione differenziale $S''(z) + \frac{S'(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)}$.
(4 pt)

Compito MMF I del 06/12/2005:II modulo

O. Ragnisco

Esercizio 1 *La matrice A ha autovalori interi positivi (semplici) $\lambda_k = k;\ \ k = 0, ..., N-1$. Calcolare $t_n(z) := tr(\exp(zA))$.*
Caratterizzare le proprietà di analiticità di $t_n(z)$. In quale dominio del piano complesso converge la successione $t_n(z)$ per $n \to \infty$? E qual è il suo limite?
(5+2 pt)

Esercizio 2 *Determinare autovalori e autovettori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 2 & \frac{1+i\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(5 pt)

Esercizio 3 *Sia P l'operatore di proiezione :*

$$P := \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^{\dagger}}{(\vec{v}, \vec{v})}$$

dove $\vec{v}$ è il vettore: $\vec{v} = (i, 1+i, 2)$
Risolvere l'equazione differenziale:

$$\dot{\vec{x}} = P\vec{x}$$

con la condizione iniziale $\vec{x}(0) \ = \ (1, 1, 1)$
(5 pt)

Esercizio 4 *Siano $\vec{v}_i$ 3 vettori di una base ortonormale e siano P_i i corrispondenti operatori di proiezione. La matrice A ha per autovettori i $\vec{v}_i$ e come autovalori corrispondenti $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3$. Data l'equazione matriciale:*

$$\dot{X} = [A, X]$$

dimostrare che la sua soluzione corrispondente alla condizione iniziale $X(0) = \alpha P_1$ e' costante (i.e. $X(t) = X(0)$).
(5 pt)

Compito MMF I del 19/12/2005:I modulo

O. Ragnisco

Esercizio 1 *Integrare la funzione* $|z|^2$ *sullo spicchio di cerchio di centro* 0 *e raggio* R *delimitato dal segmento* $[0, iR]$ *dell'asse immaginario e dalla bisettrice del II quadrante.*
(4 pt)

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)} \quad (b, a \text{ reali; } b > a)$$

Nelle regioni:

$$(i)|z| < a; \; ii) \; a < |z| < b; \; iii) \; |z| > b$$

(6 pt)

Esercizio 3 *Calcolare almeno due dei seguenti integrali:*

- $\int_0^\pi \frac{\cos\theta}{1+a\cos n\theta}$
- $\int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^4+1}$
- $\int_0^\infty \frac{\cos(kx)}{1+x^2}$

(4+4+4 pt)

Compito MMF I del 19/12/2005:II modulo

O. Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{x} = Ax$$

con la condizione iniziale $x(0) = (1,1,1)^T$*, dove* A *è la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: sviluppare la funzione di matrice che definisce la soluzione in serie di potenze
(6 pt)

Esercizio 2 *Sia* $\{\vec{e}_j\}_{j=1,2,3}$ *una base ortonormale nello spazio euclideo a 3 dimensioni. Su questa base, l'operatore* U *agisce secondo la legge:*

$$U\vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$U\vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$U\vec{e}_3 = \alpha\vec{e}_1$$

Scrivere la matrice che rappresenta U *nella base in questione, Per quali valori di* α *è una matrice unitaria? E quali sono i suoi autovalori e autovettori*
(4+4 pt)

Esercizio 3 *Sia* $\{v^{(\vec{k})}\}$, $k = 1, \cdots, N$ *una base ortonormale in* $\mathbf{E}^N$*. Si consideri l'operatore*

$$A = I + \sum_k \alpha_k v^{(\vec{k})} {v^{(\vec{k})}}^\dagger$$

Determinarne autovalori e autovettori.
(5 pt)

Compito MMF I del 12/01/2006:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Caratterizzare le curve di equazione* $|w| =$ *cost e quelle di equazione* $arg(w) =$ *cost associate alla funzione* $w = e^z$. *Costiuiscono reti ortogonali?* *(5 pt)*

Esercizio 2 *Calcolare per* $|a| \neq 1$ *l'integrale:*

$$I(z) = \int_0^\pi d\theta \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\sin^2\theta)}$$

(5 pt)

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{4z^2 + 1}$$

nei domini:

1. $|z| > 1/2$
2. $|z| < 1/2$
3. $|z - i/2| < 1$

specificando il raggio di convergenza. (6 pt)

Esercizio 4 *Calcolare almeno uno dei due integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{\cos(\alpha x)}{x^4 + 1}$$

$$I_2 = P\int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

(6 pt)

Compito MMF I del 12/01/2006:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Siano* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *una base ortonormale dello spazio euclideo complesso* E^3*. Sia* A *la matrice definita dalla decomposizione spettrale:*

$$A = \alpha \vec{e}_1 \vec{e}_1^\dagger + \beta \vec{e}_2 \vec{e}_2^\dagger + \gamma \vec{e}_3 \vec{e}_3^\dagger$$

Determinare trA *e* $detA$*. Scrivere la forma esplicita della matrice assumendo che la componente* $k-$*esima di* $\vec{e}_i$ *sia pari a* δ_{ik}
(5 pt)

Esercizio 2 *Dimostrare che lo spazio della matrici* 2×2 *a elementi complessi diviene uno spazio euclideo se si definisce il prodotto scalare come* $(A, B) = trA^\dagger B$
(5 pt)

Esercizio 3 *Sia* M *il sottoinsieme dello spazio complesso tridimensionale* C^3 *contenente i vettori della forma:*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2, v_3 \in C.$$

1. *Dimostrare che* M *non è un sottospazio vettoriale di* C^3*. (Suggerimento: come primo passo si noti che uno dei vettori della base canonica non appartiene ad* M*).*
2. *Trovare un sottoinsieme di* M *che sia un sottospazio vettoriale di* C^3 *di dimensione* 2.

(5 pt)

Esercizio 4 *Denotando con*

$$\omega_j = e^{\frac{2j\pi i}{N}} \qquad j = 1, \ldots, N$$

le radici $N-$*esime dell'unità, si consideri la matrice* A *definita da:*

$$A_{jk} = \frac{1}{N} (\omega_j)^k \qquad j, k = 1, \ldots, N$$

e il sistema di equazioni differenziali lineari $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ *con la condizione iniziale:*

$$\vec{x}_i(0) = 1 \qquad i = 1, \ldots, N$$

1. *Si risolva il sistema nel caso* $N = 3$.

2. *Si generalizzi il risultato al caso di* N *generico.*

(5+3pt)

Compito MMF I del 10/07/2006:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quali valori reali di α la funzione*

$$u(x) \;=\; x^2 + \alpha y^2$$

è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$? Determinare $f(z)$ sapendo che $f(0) = 0$.
(4 pt)

Esercizio 2 *(1) Calcolare per $|\zeta| \neq 1 < 1$ l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin(n\theta)}{1 - \zeta \exp(i\theta)}$$

e (2) discuterne le proprieta' di analiticita' nella vatiabile ζ.
(6 +2 pt)

Esercizio 3 *Determinare la funzione razionale di variabile complessa $f(z)$ tale che:*

- $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$
- *E' analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z = \pm 1$ in cui ha poli del I ordine con residui $\pm i$*
- *Ha uno zero doppio nell'origine.*

(6 pt)

Compito MMF I del 10/07/2006:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione lineare matriciale:*

$$\dot{x} = [A, x]$$

con la condizione iniziale $x(0) = \sigma_3$*, dove* A *è la matrice* 2×2*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

(6 pt)

Esercizio 2 *Sia* $\{\vec{e}_j\}_{j=1,2,3}$ *una base ortonormale nello spazio euclideo a* 3 *dimensioni. Su questa base, l'operatore* U *agisce secondo la legge:*

$$U\vec{e}_1 = \alpha(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

$$U\vec{e}_2 = \beta(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

$$U\vec{e}_3 = \gamma(\vec{e}_3 + \vec{e}_1)$$

Scrivere la matrice che rappresenta U *nella base in questione, Per quali valori di* α, β, γ *è una matrice unitaria? E quali sono i suoi autovalori?*
(6 pt)

Esercizio 3 *Calcolare*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (Tr(\exp(i\phi\sigma_3)))^2$$

(6 pt)

Compito MMF I del 19/09/2006:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quali valori del parametro α la funzione*

$$u(x,y) = e^{\alpha x}\left(\cos^2 y - \sin^2 y\right)$$

può essere considerata la parte reale di una funzione analitica $f(z)$? determinare tali funzioni. (4+2 pt.)

Esercizio 2 *Calcolare uno a scelta tra i seguenti due integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 2} d\theta$ *(4 pt.)*
2. $\displaystyle P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^3 + 8} dx$ *(6 pt.)*

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di potenze la funzione*

$$f(z) = \frac{z + 2ia}{z(z - 2ia)}$$

nell'intorno dei punti

1. $z = 0$ *(2 pt.)*
2. $z = ia$ *(3 pt.)*
3. $z = 2ia$ *(3 pt.)*

Compito MMF I del 19/09/2006:II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Trovare una base di vettori che generino il nucleo e l'immagine della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che:

$$\dim \, \mathrm{R}_A + \dim \, \mathrm{Ker}_A = 3$$

Verificare inoltre:

$$\mathrm{R}_A \oplus \mathrm{Ker}_{A^\dagger} = \mathbb{C}^3$$

(7+3 pt.)

Esercizio 2 *Trovare la matrice U che diagonalizza A (dove A è la matrice introdotta nell'esercizio precedente), cioè tale che:*

$$A_d = U^{-1} A U$$

(7 pt.)

Esercizio 3 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\dot{x} = Ax$$

(dove A è la matrice introdotta nell'esercizio 1) in corrispondenza del dato iniziale:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5 pt.)

Compito di esonero di MMF I del 06/11/2006:I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quale valore del parametro* α *la funzione :*

$$u(x,y) = x^3 + \alpha x y^2$$

è la parte reale di una funzione analitica? E qual è questa funzione?
(2 pt + 3 pt)

Esercizio 2 *1. Qual è il dominio del piano complesso in cui converge la serie :*

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(1+z)^n}{(1-z)^n}$$

2. Sapreste calcolarne la somma?
(4 pt +4 pt)

Esercizio 3 *Calcolare a scelta almeno uno dei due integrali*

$$I_1(k) = \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x^4 + a^4} \quad (k \text{ reale}, \ a \ > 0)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{x^4 + b^4} \quad (b > 0)$$

(4 pt +3 pt)

Esercizio 4 *Determinare la funzione razionale* $f(z)$ *sapendo che:*
1. Ha un polo semplice in $z = -1$ *con residuo* 1*, uno doppio in* $z = 1$ *con residuo* i*, e vale la formula* $\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = 2$*.*
2. $f(0) = 0$ *e* $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 1$*.*
(6 pt)

Esercizio 5 *Individuare e caratterizzare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)\sin z}$$

(4 pt)

Da aggiungere

Compito di esonero di MMF del 22/12/1994

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$A = i\frac{d}{dx} + x$$

definito sulla varietà lineare $\mathcal{D}(A)$ *delle funzioni appartenenti a* $L^2_{[-\pi,\pi]}$ *insieme alle loro derivate prime, e tali che* $f(-\pi) = f(\pi)$.

Esercizio 2 *Determinare il risolvente* $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ *del suddetto operatore nei due modi seguenti:*

1. *Mediante la decomposizione spettrale.*
2. *Risolvendo in* $\mathcal{D}(A)$ *l'equazione differenziale:*

$$(A - \lambda\mathbb{I})f = g$$

Utilizzare il risultato per calcolare la somma della serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \lambda^2}.$$

Esercizio 3 *Risolvere, nello spazio euclideo a* N *dimensioni, l'equazione differenziale:*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

con la condizione iniziale $\vec{x}(0) = \vec{u}$, *dove* $\vec{u}$ *è un vettore di* $\mathbb{E}^N$ *e* A *è la matrice:*

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle u|$$

Esercizio 4 *Risolvere l'equazione integro-differenziale:*

$$f'(x) = x + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp(-|x-y|)\, f(y)$$

Suggerimento:

1. *Cercare la soluzione nella forma* $f(x) = A + Bx$.
2. *Alternativamente, passare alla trasformata di Fourier.*

Compito di MMF del 30/09/1996

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso chiuso ad eccezione dei punti $z_\pm = \pm i$, dove ha residui $r_\pm = \pm 1$, sapendo che $f(\infty) = 0$.*

Esercizio 2 *Data la matrice $A = z\sigma_3$, $z \in \mathbb{C}$,*

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare limite e raggio di convergenza della serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{tr}\left(A^n\right).$$

Esercizio 3 *Dimostrare che gli operatori $T^{(N)}$, definiti in l_2 dalle relazioni:*

$$\begin{aligned} &\left(T^{(N)}\vec{x}\right)_j = \vec{x}_{j+1} \qquad j = 1, \ldots, N-1 \\ &\left(T^{(N)}\vec{x}\right)_N = 0 \end{aligned}$$

1. *sono nilpotenti (i.e. $\left(T^{(N)}\right)^{N-1}\vec{x} = \vec{0}$),*
2. *hanno solo autovalori nulli,*
3. *e la successione $T^{(N)}$ converge debolmente all'operatore di "distruzione" D:*

$$D \; : \; (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$$

Esercizio 4 *Per quali valori del parametro reale α la derivata della funzione*

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

è di modulo integrabile sul semiasse reale positivo?

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione*

$$f(x) = \sin(x)$$

nell'intervallo $[0, \pi]$. *Tracciare un grafico schematico del prolungamento della serie fuori dell'intervallo dato.*

Esercizio 6 *Mostrare che, in un opportuno spazio* τ, *la successione* $\tanh(nx)$ *converge alla distribuzione* $\mathrm{sgn}(x)$.

II compito di esonero di MMF del 17/12/1996

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^3$ *si consideri l'operatore* A, *definito dalla sua azione sui vettori di una base ortonormale* $|e^{(i)}\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$*:*

$$\begin{array}{l} A|e^{(1)}\rangle = |e^{(3)}\rangle \\ A|e^{(2)}\rangle = |e^{(1)}\rangle + |e^{(3)}\rangle \\ A|e^{(3)}\rangle = |e^{(1)}\rangle \end{array}$$

1. *Si scriva la matrice* 3×3 $(A_{ij} = \langle e^{(i)}|\, A\, |e^{(j)}\rangle)$ *che rappresenta* A *nella base assegnata e se ne calcolino gli autovalori.* (2)

2. *Si mostri che* $\mathrm{Ker(A)}$ *è l'insieme dei vettori paralleli a*

$$|v^{(0)}\rangle = |e^{(1)}\rangle - |e^{(2)}\rangle + |e^{(3)}\rangle$$

e che $\mathrm{Im(A^t)}$ *è il piano di equazione* $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. *Si mostri che*

$$\mathbb{E}^3 = \mathrm{Ker(A)} \oplus \mathrm{Im(A^t)}. \qquad (2)$$

3. *Si calcoli la funzione* $\exp(za)$, *scrivendola come combinazione lineare di* $\mathbb{I}, A, A^2$, *usando il teorema di Cayley–Hamilton e lo sviluppo in serie dell'esponenziale. Si determini in particolare la traccia di* $\exp(za)$.

Esercizio 2 *Sia data l'equazione matriciale*

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB$$

dove A *e* B *sono matrici* 2×2 *a traccia nulla.*

1. *Determinare come deve essere scelta la condizione iniziale* $X(0)$ *(anch'essa una matrice* 2×2 *a traccia nulla), affinché* $X(t)$ *sia a traccia nulla (3).*

2. *Avendo posto* $A = \sigma_1$, $B = \sigma_2$, *scrivere la soluzione* $X(t)$ *nel caso considerato al punto 1.*

Esercizio 3 *Sia* P *un operatore di proiezione* $(P^2 = P)$ *e* $f(z)$ *una funzione intera.*

1. *Si mostri che vale la formula*

$$f(z\,P) = f(0)\mathbb{I} + [f(z) - f(0)]\,P \qquad (3)$$

2. *Utilizzare il risultato al punto 1 per risolvere l'equazione differenziale:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P\vec{x}$$

con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Esercizio 4 *Dato l'operatore*

$$T_a\, f(x) = f(x+a)$$

agente sulla varietà lineare delle funzioni tali che $f(-\pi) = f(\pi)$,

1. *Dimostrare che* $H = T_a + T_{-a}$ *è hermitiano (3).*
2. *Calcolare gli autovalori e le autofunzioni di* H *(3).*

Esercizio 5 *Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni, vale la formula:*

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(nx) = \mathrm{sgn}(x)$$

Come spazio di funzioni di prova si usino le funzioni $f(x)$ *continue in un intorno dell'origine e assolutamente integrabili sulla retta. Si consiglia di spezzare l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ [\tanh(nx) - \mathrm{sgn}(x)]$$

in due parti: una per $|x| < \epsilon$ *(in cui si sfrutta la continuità di* $f(x)$*) e l'altra per* $|x| > \epsilon$ *(6).*

III compito di esonero di MMF del 27/01/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione di Green dell'operatore*

$$L_t = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}$$

sulla varietà lineare $f(a) = f(b) = 0$ $(b > a > 0)$. *(5)*

Esercizio 2 *Assumendo le condizioni al contorno dell'esercizio 1, determinare autovalori e autofunzioni di*

$$\tilde{L}_t = t^2\,L_t = t\,\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}$$

Suggerimento: cercare soluzioni di $\tilde{L}_t f(t) = \lambda\, f(t)$ *nella forma* $f(t) = t^\alpha$. *(5)*

Esercizio 3 *Data l'equazione differenziale:*

$$i\frac{df(t)}{dt} + q(t)\,f(t) = \lambda\,f(t) \tag{10}$$

dimostrare che nel caso in cui $q(t)$ *abbia "media nulla" in* $(0,T)$, *cioè*

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\,q(t) = 0$$

soluzioni non banali di (10) che soddisfano la condizione di periodicità $f(0) = f(T)$, *si ottengono soltanto per*

$$\lambda = \lambda_k = \frac{2\,k\,\pi}{T} \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad (5)$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo* $[-\pi,\pi]$ *la funzione* $\cosh(\alpha x)$. *(3)*

Usare il risultato ottenuto per dimostrare la formula:

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+(n\pi)^2}$$

Esercizio 5 *Data la funzione*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\, e^{-ay^2}$$

calcolare la sua trasformata di Fourier definita dalle formule:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\, f(x)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, f(k)$$

Per piccoli valori di x vale la formula $f(x) = f_0 + f_1\, x$. Calcolare i coefficienti f_0 e f_1 nel caso $a = 1/2$. (6)

Esercizio 6 *Sia dato l'operatore differenziale*

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2$$

Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$Lf(x) = e^{-x}$$

mediante il metodo della trasformata di Fourier.

compito di MMF del 03/02/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso (aperto), ad eccezione dei punti z_k, tali che $z_k^3 = 1$, in cui ha poli semplici con residui $r_k = z_k$, sapendo che:*

$$f(0) = 0; \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 2$$

Esercizio 2 *Dimostrare che la matrice $N \times N$ A_N, definita mediante la sua azione sui vettori della base canonica $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^N$ dalle relazioni:*

$$\begin{aligned} A_N\vec{e}_k &= k\vec{e}_k + \vec{e}_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, N-1) \\ A_N\vec{e}_N &= N\vec{e}_N \end{aligned}$$

Esercizio 3 *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_N(z) = \mathrm{tr}\left(e^{zA_N}\right)$$

con A_N come nell'esercizio precedente. Se ne determini l'espressione esplicita, e si individui il dominio del piano complesso in cui la successione $\{f_N(z)\}$ converge, e se ne calcoli il limite.

Esercizio 4 *Gli operatori A_+ e A_- sono (densamente) definiti sullo spazio funzionale $\mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$, mediante la loro azione sulla base di Fourier complessa*

$$\vec{e}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{inx} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

dalle formule:

$$\begin{aligned} A_+\vec{e}_n &= n\vec{e}_{n+1} \\ A_-\vec{e}_n &= (n-1)\vec{e}_{n-1} \end{aligned}$$

Si dimostrino le seguenti proprietà:

1. $A_- = (A_+)^\dagger$

2. A_+ e A_- *sono diagonali nella base di Fourier, e verificano le relazioni:*

$$\begin{aligned}(A_+ A_-)\vec{e}_n &= (n-1)^2 \vec{e}_n \\ (A_- A_+)\vec{e}_n &= n^2 \vec{e}_n\end{aligned}$$

3. A_+ e A_- *sono rappresentabili nello spazio in questione mediante gli operatori differenziali:*

$$A_+ \longrightarrow -i\, e^{ix} \frac{d}{dx} \qquad\qquad A_- \longrightarrow -i \frac{d}{dx}\, e^{-ix}$$

Esercizio 5 *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione differenziale:*

$$f''(x) + q^2 f(x) = \theta(a^2 - x^2)$$

Considerando che una generica soluzione è caratterizzata da comportamenti asintotici del tipo:

$$f(z) \simeq \begin{cases} c_+ \cos(qx) + s_+ \sin(qx) & x \to \infty \\ c_- \cos(qx) + s_- \sin(qx) & x \to -\infty \end{cases}$$

determinare la matrice 2×2 M *tale che:*

$$\begin{pmatrix} c_+ \\ s_+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} c_- \\ s_- \end{pmatrix}$$

Esercizio 6 *Calcolare la trasformata di Fourier di*

$$f(x) = \frac{x}{\cosh(\alpha x)}$$

compito di MMF del 24/02/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare il dominio di analiticità delle funzioni*

$$f_n(z) = \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-z^2 t} \qquad n \geq 0$$

Mostrare che $\forall n \geq 0$ *le funzioni* $f_n(z)$ *possono essere prolungate analiticamente all'intero piano complesso privato dell'origine.*

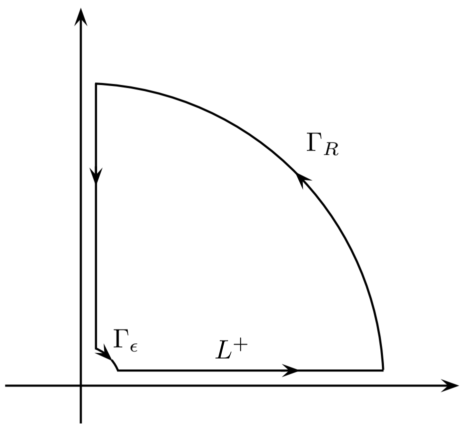
Esercizio 2 *Si consideri la funzione*

$$f(t) = \theta(t)\, t^{-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

1. *Senza effettuare alcun integrale, si mostri che la trasformata di Fourier* $\hat{f}(\omega)$ *ha la forma di una potenza di* ω *e si determini l'esponente in funzione di* α.

2. *Si calcoli* $\hat{f}(\omega)$ *Suggerimento: si passi nel piano complesso della variabile* t *e si consideri il cammino d'integrazione mostrato in figura. Si ricorda che*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty dy\, y^{p-1}\, e^{-y}$$



3. *Nel caso* $\alpha = 1/2$, *utilizzare il risultato del punto 2 per calcolare gli integrali di Fresnel*

$$\int_0^\infty dy\, \cos(y^2)$$
$$\int_0^\infty dy\, \sin(y^2)$$

Esercizio 3 *Nello spazio l_2, si consideri la successione di operatori definiti dalla loro azione sulla base canonica $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$:*

$$A_N \vec{e}_k = \begin{cases} \vec{e}_{k+1} & k = 1, \dots, N-1 \\ \vec{e}_1 & k = N \\ 0 & k > N \end{cases}$$

1. *Mostrare che A_N ha per autovalori le radici $N-$esime dell'unità.*
2. *Mostrare che il limite della successione A_N è l'operatore C, detto anche di "creazione", tale che:*

$$C : (x_1, \dots, x_n, \dots) \;\longrightarrow\; (0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$$

Esercizio 4 *In $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ si considerino gli operatori (definiti su una varietà densa sullo spazio considerato)*

$$E_0 = i\frac{d}{d\theta} \qquad E_{\pm} = \pm i\, e^{\pm i\theta}\frac{d}{d\theta}$$

1. *Si calcolino i commutatori*

$$[E_0, E_{\pm}] \qquad [E_+, E_-]$$

   e si costruiscano 3 matrici 2×2 che obbediscono alla stessa algebra.

2. *Si determino le matrici (infinite) che rappresentano $E-_0, E_+, E_-$ nella base di Fourier:*

$$\vec{e}_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}$$

Esercizio 5 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x^4$$

1. *Se ne calcoli lo sviluppo di Fourier in $[-\pi, \pi]$*
2. *Si usi il risultato per calcolare la serie*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

   (Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$)).

Ci sono le soluzioni!

compito di MMF del 09/06/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppar in serie di potenze la funzione*

$$\frac{\sin(z)}{z^2 - 1}$$

nei domini:

1. $|z| < 1$;
2. $2 > |z - 1| > 0$.

Esercizio 2 *Mediante un calcolo diretto, verificare che l'integrale:*

$$I = \int_0^{2\pi} dz \frac{\cos(\theta)}{z - \exp(i\theta)}$$

definisce due funzioni $f^{(e)}(z)$, $f^{(i)}(z)$, *analitiche rispettivamente all'esterno e all'interno del cerchio* $|z| = 1$. *Mettere in relazione la "discontinuità"* $f^{(e)}(z) - f^{(i)}(z)$ *su* $|z| = 1$ *con la funzione integranda.*

Esercizio 3 *Utilizzando la ben nota espressione di una matrice* 2×2 *in termini di matrici di Pauli:*

$$A = a_0 \, \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{3} a_k \sigma_k \ := a_0 \, \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

trovare le condizioni su $(a_0, \vec{a})$ *che rendono la matrice* A *un proiettore; determinare, inoltre, la direzione su cui proietta* A *(cioè l'autoversore di* A *con autovalore* 1*).*

Esercizio 4 *Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di*

$$f(x) = \exp(\alpha|x|)$$

in $[-\pi, \pi]$. *Sfruttando l'uniforme convergenza in* α *della serie utilizzare il risultato per calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di* $|x|$.

Esercizio 5 *Considerare l'equazione integrale:*

$$f(x) = \frac{i\lambda}{\pi} \, P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{x - y}$$

Mostrare che l'equazione ammette soluzioni non nulle solo per $\lambda = \pm 1$, *e che queste soluzioni sono antitrasformate di Fourier di funzioni* $\hat{f}(k)$ *che si annullano per* $k > 0$ *o per* $k < 0$.

compito di MMF del 30/09/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Trovare la soluzione* $u(x,y)$ *del problema di Dirichlet:*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x^2+y^2<R^2) \\ u(x,y) = \cos^2(\theta) & (x^2+y^2=R^2) \end{array}$$

Suggerimento: osservare che u *è la parte reale di una funzione analitica per* $|z|<R$*, e che, sul cerchio* $|z|=R$

$$u = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \mathrm{Re}\frac{z^2+R^2}{2R^2}$$

Esercizio 2 *Calcolare gli integrali*

$$I_n(a) = \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\cos(n\theta)}{1-a^2+2a\,\cos(\theta)} \qquad (0<a<1)$$

e la somma della serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$$

Esercizio 3 *Dimostrare che se* $\mathcal{H}$ *è una matrice Hermitiana, le matrici:*

$$\mathcal{U} = \exp(i\mathcal{H}) \qquad \mathcal{V} = (1+i\mathcal{H})(1-i\mathcal{H})^{-1}$$

sono entrambe unitarie. Trovarne l'espressione esplicita nel caso in cui si abbia:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{3} a_k\sigma_k$$

dove le σ_k *sono le matrici di Pauli.*

Esercizio 4 *Dato il sistema di equazioni differenziali:*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = [\mathbf{P},\mathbf{A}] \qquad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = [\mathbf{Q},\mathbf{A}] + \mathbf{P}$$

dove $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *sono matrici hermitiane e* $\mathbf{A}$ *è una matrice antihermitiana, si dimostri che:*

1. *gli autovalori di* $\mathbf{P}$ *sono costanti del moto;*

2. *gli autovalori di* $\mathbf{Q}$ *sono quelli della matrice* $\mathbf{Q}(0) + \mathbf{P}(0)\,t$.

Esercizio 5 *Determinare la funzione di Green dell'operatore differenziale:*

$$L_x = DpD; \qquad D = \frac{d}{dx}, \qquad p(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

che soddisfa le condizioni al contorno $\mathcal{G}(-a, y) = \mathcal{G}(a, y) = 0$.

Esercitazione di MMF del 22/12/1997

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dimostrare le seguenti formule (nel senso delle distribuzioni):*

1. $|x|'' = 2\delta(x)$
2. $$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \frac{e^{ikx}}{k - i\epsilon} = \mu\theta(x)$$
   e trovare μ.
3. $$\lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{\epsilon}{\pi} \frac{2x}{(\epsilon^2 + x^2)^2} = \delta'(x)$$

Esercizio 2 *Determinare le funzioni di Green degli operatori differenziali:*

$$(L_1 f)(x) := f''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} f'(x) \qquad \begin{array}{l} 1.\ p(x) = 1/x \\ 2.\ p(x) = x \\ 3.\ p(x) = 1 - x^2 \end{array}$$

$$(L_2 f)(x) := f''(x) - k^2 f(x) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3 *Determinare l'aggiunto dell'operatore* C *definito in* l_2 *da:*

$$C : (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$$

Verificare che $DC = \mathbb{I}$*, essendo* D *l'operatore:*

$$D : (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$$

Calcolare infine CD.

III compito di esonero di MMF del 23/01/1998

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare tra* $-\pi$ *e* π *la serie di Fourier della funzione* $\theta(\cos(2x)))$ *dove* $\theta(x)$ *è la funzione a gradino di Heaviside.*

Esercizio 2 *Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare la funzione* $F(x)$ *definita nel modo seguente:*

$$F(x) = \left(1 - a\frac{d}{dx}\right)^{-1} e^{-b|x|}$$

Suggerimento: considerare lo sviluppo in serie di potenze della funzione dell'operatore differenziale.

Esercizio 3 *Si consideri l'equazione matriciale operatoriale:*

$$\frac{dA}{dt} = [L, A]$$

e le funzioni $G(t)$ *e* $D(t)$ *definite da:*

$$G(t) = \mathrm{tr}\left[e^{\lambda L} A(t)\, B\right], \qquad D(t) = \mathrm{tr}\left[e^{\lambda L} B\, A(t)\right]$$

con $A(0)$, B *e* L *operatori non commutanti. Dimostrare, assumendo, quando necessario, che esistano le trasformate di Fourier di* $G(t)$ *e* $D(t)$ *che:*

1. $D(t) = G(t - \lambda)$
2. $D(\omega) = \exp(i\lambda\omega)\, G(\omega)$

Esercizio 4 *Determinare il limite della successione di distribuzioni*

$$D_N^{(k)} = \sum_{n=0}^{N} n^k\, e^{int}$$

Lo spazio di prova è quello delle funzioni $f \in C^\infty[-\pi, \pi]$ *periodiche con tutte le derivate.*

Esercizio 5 *Dimostrare che la successione di operatori finito-dimensionali:*

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |e^{(n)}\rangle\langle e^{(n)}|$$

dove gli $\{\langle e^{(n)}|\}$ *formano una base ortonormale, converge in norma all'operatore*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |e^{(n)}\rangle\langle e^{(n)}|$$

Dimostrare anche che $||A|| = 1$ *e che* A *è compatto.*

Esercizio 6 *Trovare autovalori ed autofunzioni di*

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\, x\, \frac{d}{dx}$$

sulla varietà lineare delle funzioni tali che $f(1) = f(e) = 0$.

Esercitazione di MMF del 02/02/1998

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la successione di funzioni:*

$$f_n(z) \equiv \frac{1}{n!} \int_0^\infty dt\, t^n\, e^{-tz}$$

1. *Dimostrare, senza calcolare l'integrale, che le* f_n *sono analitiche per* $\mathrm{Re}\, z > 0$.

2. *Determinare il prolungamento analitico di* $f_n(z)$ *e il dominio in cui*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) \to 0$$

Esercizio 2 *Calcolare*

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} d\zeta\, \frac{\zeta^n}{\zeta - z} \qquad (|z| \neq 1)$$

con n *intero positivo, nullo o negativo.*

Esercizio 3 *Le matrici (diagonalizzabili)* L *ed* E *variano nel tempo secondo le equazioni:*

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= [L(t), A] \\ \frac{dE}{dt} &= [E(t), A] + \frac{1}{2}\{E(t), L(t)\} \end{aligned}$$

dove A *è una matrice costante. Indicando con* λ_i *gli autovalori di* L *e con* ϵ_i *gli autovalori di* E*, dimostrare che:*

1. *i* $\{\lambda_i\}$ *sono costanti nel tempo*

2. *gli* $\epsilon_i(t)$ *sono gli autovalori della matrice:*

$$\exp\left(\frac{L(0)\, t}{2}\right)\, E(0)\, \exp\left(\frac{L(0)\, t}{2}\right)$$

Esercizio 4 *Con riferimento all'esercizio precedente, si assuma che (ad ogni tempo)* $L^N = \mathbb{I}$. *Si considerino le quantità* c_k $(k = 1, \ldots, N)$, *definite come:*

$$c_k = \mathrm{tr}\left(E\,L^{k-1}\right)$$

1. *Si dimostri che valgono le equazioni del moto:*

$$\dot{c}_k = c_{k+1} \qquad (c_{N+1} = c_1)$$

2. *Si integri esplicitamente il sistema precedente.*

Esercizio 5 *Data la funzione*

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}$$

si calcolino, usando di preferenza la trasformata di Fourier, le funzioni:

$$g_n(x) \equiv (\theta \star g_{n-1})(x) \qquad g_0(x) = f(x)$$

Esercizio 6 *Si sviluppi la funzione* $\cosh(\alpha x)$ *in serie di Fourier nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$. *Si utilizzi il risultato per calcolare le serie numeriche:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}$$

Ci sono le soluzioni!

Esercitazione di MMF del 28/01/1999

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione meromorfa $f(z)$ sapendo che:*

1. $f(0) = 0$
2. $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = 1$
3. $f(z)$ *ha due poli semplici in* $z = -1$ *e* $z = +1$ *con residui* $r_{-1} = 0$ *e* $r_{+1} = 1$
4. $\lim_{z \to 1} (z-1)^2 f(z) = 5$

Esercizio 2 *Calcolare*

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(i\alpha x)}{\sinh(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3 *Dire se sono vere le seguenti stime asintotiche e spiegarne il motivo:*

1. $\sinh(\alpha x) \sim \exp(\alpha x) \qquad x \to \infty$
2. $\int_0^{\infty} dt \, \frac{\sin(\lambda t)}{1+t^2} = O(\lambda^{-1}) \qquad \lambda \to \infty$
3. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \qquad x \to 0$

Esercizio 4 *Sapendo che*

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^3 - 1$$

scrivere la funzione di matrice $\exp(A)$ *in termini di* $\mathbb{I}, A, A^2$.

Esercizio 5 *Calcolare*

$$\mathrm{tr} |v(z)\rangle \langle v(z)|$$

dove $|v(z)\rangle$ *è il vettore colonna di componenti*

$$v_k = z^k \qquad k = 1, \ldots, N$$

Esercizio 6 *Nello spazio delle matrici reali $N \times N$, munito del prodotto scalare*

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(x^t\, Y)$$

è definito l'operatore:

$$\mathcal{A} :\ X \to Y = [A, X]$$

con A matrice assegnata.

1. *Determinare $\mathcal{A}^\dagger$.*
2. *Assumendo A diagonale $A_{ij} = a_i\,\delta_{ij}$ con gli elementi a_i distinti, si ottiene chiaramente:*

   $$Y_{ij} = (\mathcal{A}(X))_{ij} = (a_i - a_j)X_{ij}$$

   Si dimostri che 0 è un autovalore di $\mathcal{A}$ di molteplicità N e se ne determino le "automatrici".

Esercizio 7 *Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier si risolva l'equazione integrale (con nucleo di convoluzione):*

$$x(t) = y(t) + \frac{P}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s}$$

$$y(t) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + t^2}$$

Esercizio 8 *Sviluppare in serie di Fourier in $[-1, 1]$ la funzione $f(x) = |\cos(\pi x)|$.*

Esercizio 9 *Dato in l_2 l'operatore "triangolare":*

$$y_n = (Ax)_n = \alpha^n x_n + \sum_{k=1}^{r} a_{nk}\, x_k \qquad |\alpha| < 1$$

Dimostare che $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$ sono autovalori di A e che 0 è un punto dello spettro.

Compito di MMF del 22/02/1999

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Sviluppare in serie di potenze la funzione*

$$f(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

nel dominio

$$0 < |z-1| < \sqrt{3}$$

Esercizio 2 *Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze:*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\dots(a+n)}$$

Si osservi che l'espressione a denominatore nella formula precedente si può scrivere in termini della funzione Γ *di Eulero nella forma:*

$$a(a+1)\dots(a+n) = a\frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)}$$

e si utilizzi il comportamento asintotico della funzione $\Gamma(x)$ *per grandi valori dell'argomento.*

Esercizio 3 *Calcolare la trasformata di Fourier di* sech(ax).

Esercizio 4 *La matrice* 3×3 *agisce sui vettori* $|e^{(i)}\rangle$ *di una base ortonormale in* $\mathbb{C}^3$ *nel modo seguente:*

$$\begin{aligned}
U|e^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e^{(2)}\rangle + |e^{(3)}\rangle\right) \\
U|e^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e^{(2)}\rangle - |e^{(3)}\rangle\right) \\
U|e^{(3)}\rangle &= |e^{(1)}\rangle
\end{aligned}$$

Dimostrare che U *è unitaria e trovarne autovalori e autovettori.*

Esercizio 5 *Dimostrare che ogni operatore di proiezione su* $\mathbb{C}^2$ *si può scrivere mediante le matrici di Pauli nella forma:*

$$P = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

dove $\vec{n}$ *è un vettore di modulo 1 e* $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Esercizio 6 *Dato l'operatore*

$$L = -D^2 + \omega^2 x^2 + \frac{g(g+1)}{x^2}, \qquad D = \frac{d}{dx},$$

trovare due operatori differenziali del I ordine $A, A^\dagger$*, mutuamente aggiunti, tali che si possa scrivere*

$$L = A^\dagger A + \alpha \mathbb{I}$$

Utilizzare il risultato per determinare l'autovalore più basso di L e la corrispondente autofunzione.

Esercizio 7 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione, definita nell'intervallo* $[0, 1]$ *dalla formula*

$$f(x) = x(1-x)$$

Esercizio 8 *Utilizzare le proprietà della trasformata di Fourier e del prodotto di convoluzione per determinare, se esistono, le soluzioni dell'equazione integrale omogenea:*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)\, y(s)\, ds$$

dove $K(t) = (t^2 + a^2)^{-1}$.

Esercitazione di MMF del 17/11/2000

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Si calcoli l'integrale*

$$I_n(z) = \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} d\zeta \, \frac{\mathrm{sech}(\zeta)}{\zeta\,(\zeta - z)}$$

dove C_n è la circonferenza di centro l'origine e raggio $R_n = n\pi$.

Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} I_n(z) = 0$$

e si utilizzi questo risultato per ottenere lo sviluppo in fratti semplici della funzione $f(z) = \mathrm{sech(z)}$.

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di potenze la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$

2. $|z + 2| < 3$

3. $|z| > 2$

Esercizio 3 *Si calcoli l'integrale*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \, \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}$$

con un errore dell'ordine di x^{-3}

Esercizio 4 *Si dimostri che se $f(z)$ è un polinomio di grado N, vale l'uguaglianza:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \, \frac{f'(z)}{f(z)} = N$$

dove C è una qualunque curva chiusa che contiene al suo interno gli zeri di $f(z)$.

Esercizio 5 *Sia*

$$\begin{aligned}
U|e^{(1)}\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{3}\left(|e^{(1)}\rangle + |e^{(2)}\rangle + |e^{(3)}\rangle\right)\\
U|e^{(2)}\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2}\left(|e^{(1)}\rangle - |e^{(2)}\rangle\right)\\
U|e^{(3)}\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{6}\left(|e^{(1)}\rangle + |e^{(2)}\rangle - 2|e^{(3)}\rangle\right)
\end{aligned}$$

1. *Dimostrare che U è unitario.*
2. *Determinare il vettore che è lasciato invariato da U (cioè $U|u\rangle = |u\rangle$).*

Esercizio 6 *Dato un vettore reale $\vec{n}$ di modulo 1,*

1. *Determinare α e β in modo tale che l'operatore*

   $$P = \alpha\mathbb{I} + \beta\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \alpha\mathbb{I} + \beta\sum_k nk\,\sigma_k$$

   sia idempotente ($P^2 = P$); σ_k sono le matrici di Pauli.
2. *Quali sono gli autovalori di P? e i corrispondenti autovettori?*

Esercitazione di MMF del 03/10/2001

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale delle funzioni*

$$F_1(z) = \frac{\operatorname{Re} z^2}{z}$$
$$F_2(z) = \frac{\operatorname{Im} z^2}{z}$$

sul cammino chiuso che si ottiene considerando gli archi di circonferenza di centro l'origine e raggi $r = 1$ *e* $r = 2$ *e di aperture* $\pi/2$ *nel I quadrante, il segmento* $(1, 2)$ *sull'asse reale e il segmento* $(2i, i)$ *sull'asse immaginario.*

Esercizio 2 *Date le funzioni*

1. $\dfrac{1}{(z-1)^2}$
2. $\dfrac{1}{(z^2-1)}$
3. $\dfrac{1}{z^2}$

Dire quali di esse è integrabile su $|z| = 1$*, quale è integrabile solo nel senso del valor principale e quale non è integrabile. Laddove gli integrali esistono, se ne fornisca il risultato.*

Esercizio 3 *Calcolare "l'integrale di Fresnel"*

$$\int_0^\infty dx \, \exp(ix^2)$$

Si suggerisce di introdurre la funzione di variabile complessa $\exp(iz^2)$ *e di integrarla sul cammino chiuso delimitato dal segmento* $(0, R)$ *dell'asse reale , dall'arco di circonferenza di raggio* R *e ampiezza* $\pi/4$ *e dal segmento di bisettrice del I quadrante che congiunge il punto* $R\exp(i\pi/4)$ *all'origine.*

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Compito di MMF del 17/06/2002

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare gli integrali:*

$$
\begin{aligned}
R_n &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\, \cos(\theta)} \\
I_n &= \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin(n\theta)}{1 + a\, \cos(\theta)}
\end{aligned}
$$

con $0 < a < 1$.

Esercizio 2 *Determinare lo sviluppo asintotico per* $x \to \infty$ *dell'integrale:*

$$F(x) = \int_0^{\infty} dt \, \frac{\exp(-xt)}{1 + t^2}$$

(si ricordi che $\int_0^\infty dy\, y^n \exp(-y) = n!$*).*

Stimare l'errore che si commette considerando i primi N *termini dello sviluppo.*

Esercizio 3 $|u\rangle$ *e* $|v\rangle$ *sono due vettori arbitrari in uno spazio euclideo di dimensione* N*. Data la matrice*

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle v|$$

1. *calcolarne autovalori e autovettori;*
2. *calcolarne il determinante.*

Esercizio 4 *Calcolare la serie di Fourier della funzione:*

$$f(x) = x\, \cosh(\alpha x)$$

Esercizio 5 *Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni:*

$$D_n(x) = n \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-n^2(x-y)^2)\, \sin(\pi y)}$$

Determinare $\hat{D}_n(k)$ *e* $\lim_{n\to\infty} \hat{D}_n(k)$ *(*$\hat{D}_n(k)$ *trasformata di Fourier di* $D_n(x)$*.*

Esercizio 6 *Calcolare autovalori e autofunzioni di*

$$L = \frac{d}{dx} + \omega\, x$$

con le condizioni al contorno $f(0) = f(1)$.

Compito di MMF del 22/07/2002

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare la funzione razionale* $f(z)$ *che ha poli semplici in* $z = \pm a$*, con residui* $\pm r$*, ed è tale che*

$$f(0) = 1$$
$$\lim_{z\to\infty} f'(z) = 0$$

Esercizio 2 *Determinare il dominio di analiticità di*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t}\,\mathrm{sech(t)}$$

Esercizio 3 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$I_1 = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\nu x}}{\sinh(x)} \qquad -1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1$$
$$I_2 = \int_0^\infty dx\, \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{x^2+9}$$

Esercizio 4 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} \dot{x}_j = Z\,y_j - Y\,z_j \\ \dot{y}_j = 2(Y\,x_j - X\,y_j) \\ \dot{z}_j = 2(X\,z_j - Z\,x_j) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^N x_j \\ Y &= \sum_{j=1}^N y_j \\ Z &= \sum_{j=1}^N z_j \end{aligned}$$

Esercizio 5 *Sviluppare in serie di Fourier in* $[-\pi, \pi]$ *la funzione* $|\sin(x)|$*. Utilizzare il risultato per calcolare la somma della serie:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2}$$

Esercizio 6 *Calcolare*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-1} \int_0^\infty dy \, \frac{\exp(-\epsilon^{-2}(y-2)^2)}{1+y^2}$$

Esercizio 7 *Dimostrare che l'operatore*

$$M = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{g(g+1)}{\sin^2(x)} \qquad g > 0, \;\; x \in [0, \pi]$$

è definito positivo (cioè $(v, Hv) > 0 \;\forall v \in \mathcal{L}_2[-\pi, \pi]$*).*

Compito di MMF del 26/09/2002

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare gli integrali:*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty dx\, \frac{\cos(px)}{\cosh(x)} \qquad p \in \mathbb{R} \\
I_2 &= \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di potenze la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1-z^3}$$

nelle due regioni:

$$
\begin{aligned}
&|z| < 1 \\
&0 < |z-1| < R
\end{aligned}
$$

dove R, da determinare, è il raggio esterno di convergenza della serie.

Esercizio 3 *Sono corrette le seguenti espressioni?*

1. $\sin(z) \sim z^2 \qquad z \to 0$
2. $\cosh(x) \sim e^x \qquad x \to +\infty$

Esercizio 4 *Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\exp(\alpha P) = \mathbb{I} + \alpha P$$

dove P è un operatore idempotente: $P^2 = P$.

Esercizio 5 *Per quali valori di z converge l'espressione*

$$t(z) = \mathrm{tr}(\vec{u}(z)\, \vec{v}(z)^\dagger)$$

dove $\vec{u}(z)$ e $\vec{v}(z)$ sono i vettori colonna di componenti $u_n = z^n$, $v_n = \bar{z}^n$.

Esercizio 6 *Trovare autovalori e autovettori dell'operatore:*

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}$$

sulla varietà lineare delle funzioni $f(x)$ tali che $f(1) = f(2) = 0$.

Esonero di MMF II del 01/12/2003

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Dimostrare che la funzione*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(zt)}{\cosh(t)}$$

è analitica nel semipiano $\mathrm{Re}(z) < 1$.

Esercizio 2 *Calcolare iseguenti integrali:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^\infty dx\, \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \\ I_2 &= \int_0^\infty dx\, \frac{\cos(kx)}{\cosh(x)} \\ I_3 &= \int_1^\infty dx\, \frac{x^{-\alpha}}{1 + x^n} \qquad (1 > \alpha > 0;\ n > 0) \end{aligned}$$

Esercizio 3 *Sia*

$$F(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{\exp(-xt)}{\cosh(t)}$$

Dimostrare che lo sviluppo asintotico per $x \to \infty$ *è in effetti uno sviluppo convergente.*

Esercizio 4 *Con il metodo di Laplace trovare il termine dominante per* $x \to \infty$ *degli integrali:*

$$L_n(x) = \int_0^\infty dt\, \exp(t + t^{-1})\, \cos(n\pi t)$$

Esercizio 5 *Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi* x *e* t*, nella direzione* $x/t = v = \mathrm{cost.}$*, dell'integrale*

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{k^2 + a^2}$$

Compito di MMF del 23/02/2004

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Supponendo che valga la stima:*

$$|f(x)| \leq C \exp(-\sigma|x|)$$

dimostrare che la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp(-ikx) f(x)$$

è analitica nella striscia $|\mathrm{Im}\, k| < \sigma$*.*

Esercizio 2 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = \int_0^{\infty} dx \, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 + a^2}$$
$$I_2 = P \int_0^{\infty} dx \, \frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$$
$$I_3 = \int_{-1}^{1} dx \, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esercizio 3 *Dimostrare che l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\exp(-|t|)}{t - z}$$

definisce due funzioni $f^{(\pm)}(z)$*, analitiche rispettivamente per* $\mathrm{Im}\, z > 0$ *e* $\mathrm{Im}\, z < 0$*, tali che:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f^{(+)}(t + i\epsilon) - f^{(-)}(t - i\epsilon) = 2\pi i \exp(-|t|)$$

Esercizio 4 *Calcolare il termine dominante per grandi* g*,* $g > 0$ *dell'integrale*

$$I(g) = \int_0^{\infty} dr \, r^2 \exp(-gV(r)) \qquad V(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$$

Esercizio 5 *Risolvere l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^t (t-s)\, x(s)$$

in uno dei modi seguenti:

1. *trasformando l'equazione integrale in una equazione differenziale, derivando due volte rispetto a t, e notando come l'equazione integrale "incorpori" determinate condizioni iniziali;*

2. *cercando la soluzione nella forma $x(t) = a + b\,t$*

3. *Passando alla trasformata di Laplace $\hat{f}(s) = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-ts)\, x(s)$*

Esercizio 6 *Usando la trasformata di Fourier risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = 1 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \frac{x(s)}{(t-s)^2 + a^2}$$

Esercizio 7 *Determinare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$L_x := \left(x\, \frac{d}{dx}\right)^2$$

nello spazio delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno:

$$f(e) = f(e^{-1}) = 0$$

Determinare su questo stesso spazio la funzione di Green dell'operatore L_x.

Compito di MMF II del 10/09/2004

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) = \int_0^\infty dt \, \frac{\exp(zt)}{\cosh^2(t)}$$

e discuterne le proprietà di analiticità.

Esercizio 2 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \, \frac{x^\alpha \, \ln(x)}{x^2+1} \qquad (1 > \alpha > 0)$$

Esercizio 3 *Sia*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \, \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh(t)}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x.

Esercizio 4 *Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi x e t, nella direzione $x/t = v = \mathrm{cost.}$, dell'integrale*

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{\cosh(k)}$$

Esercizio 5 *Risolvere l'equazione integrale di Fredholm:*

$$x(t) = \sin(t) + \lambda \left(\int_0^t t\,(1-s)\,x(s)\,ds + \int_t^1 s\,(1-t)\,x(s)\,ds \right)$$

Suggerimento: trasformare, derivando due volte, l'equazione integrale in una equazione differnziale e osservare che l'equazione integrale "ingloba" le condizioni al contorno su $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Esercizio 6 *Si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$*, introdotto nell'esercizio precedente, definito dalla formula:*

$$\mathbf{K\,x(t) := \int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds = \int_0^t t\,(1-s)\,x(s)\,ds + \int_t^1 s\,(1-t)\,x(s)\,ds}$$

Trovare le soluzioni dell'equazione agli autovalori:

$$\mathbf{K\,x(t)} = \mu\,\mathbf{x(t)} \qquad \mathbf{x(0) = x(1) = 0}$$

Calcolare la serie numerica data dalla somma degli autovalori, vale a dire la traccia τ *dell'operatore* $\mathbf{K}$*, sapendo che vale la formula:*

$$\tau = \int_0^1 dt\,K(t,t)$$

Esercizio 7 *Usando la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integrale:*

$$F(x) = a + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\,F(x-y)\frac{\cos(\alpha x(x-y)}{\cosh(x-y)}$$

Compito di MMF I del 10/09/2004

R.Raimondi

Esercizio 1 *Si determini lo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 1$ della funzione*

$$f(z) = (z^2 + z^4)\ \exp\left(1 + \frac{1}{z-1}\right)$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_1^\infty dx\, \frac{e^(ix)}{(x-1)^2 + 4}$$

Esercizio 3 *Si consideri la matrice*

$$M = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare autovalori e autovettori di M.*
2. *Senza usare il prodotto righe per colonne esplicitamente, dimostrare che $M^3 = M$.*

Esercizio 4 *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \cos(2x)\ \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Compito di MMF I del 07/12/2004: I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare zeri e poli della funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{\sinh(z)}$$

e calcolare

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

Dove Γ è la curva chiusa composta dal segmento $(-3\pi/2,\, 3\pi/2)$ e dalla semicirconferenza $|z| = 3\pi/2$, $0 \leq \arg(\mathrm{z}) \leq \pi$ percorsa in senso antiorario.

Il punto all'infinito è una singolarità isolata? perché?

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione*

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

nelle regioni:

$$|z| < 1, \qquad 1 < |z| < 2, \qquad |z+1| > 1, \qquad |z+2| < 1$$

Esercizio 3 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1}\, dx$$

$$I_2 = \int_{|z|=2} \frac{z\, \exp(tz)}{(z+1)^3}\, dz$$

$$I_3 = \int_{|z|=2} \frac{\exp(1/z)}{z+1}\, dz$$

Compito di MMF I del 07/12/2004: I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Determinare poli e zer dilla funzione:*

$$F(z) = \frac{z^2 - 1}{z^n - 1}$$

$z = 1$ *è un punto singolare? e* $z = -1$?

Esercizio 2 *Sviluppare in serie di potenze:*

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}$$

nelle regioni:

$$|z| < 1 \qquad 1 < |z| < 2 \qquad |z| > 2$$

Esercizio 3 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \frac{\cos(n\theta)}{1 + q\, \cos(\theta)} \qquad q < 1$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x}{x^3 + 1}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\cosh(\alpha x)}{1 + \cosh^2(x)}$$

Compito di MMF I del 07/12/2004: II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Data la matrice*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calcolarne autovalori ed autovettori, e scrivere la funzione

$$F(z) = \mathrm{tr}\left((\mathbb{I} - zA)^{-1}\right)$$

determinandone le singolarità.

Esercizio 2 *Siano* A *e* B *le seguenti matrici* 2×2*:*

$$A := a_0\mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \qquad B := b_0\mathbb{I} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

con $\vec{a} = \alpha\,(1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$*. Si calcoli esplicitamente* $\exp([A,B])$*.*

Esercizio 3 *Dimostrare che se* H *è una matrice hermitiana, la sua "trasformata di Cayley"*

$$U := \frac{1+iH}{1-iH}$$

è unitaria.

Calcolare autovalori e autovettori di U *nel caso particolare in cui* $H = \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$.

Esercizio 4 *Siano*

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad k = 0, \dots, N-1$$

le N *radici dell'unità.*

Si considerino i vettori $\vec{v}^{(j)}$ *di componenti*

$$v_k^{(j)} = \frac{(\omega_k)^j}{\sqrt{N}}$$

e si dimostri che essi costituiscono una base ortonormale.

Compito di MMF II del 13/09/2005

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{1+x^3}$$
$$I_2 = P\int_0^\infty dx \, \frac{x}{\sinh(\alpha x)}$$

Esercizio 2 *Dire se sono corretti (e perché) gli andamenti asintotici:*

$$\sin(\alpha x) \sim x \qquad x \to 0$$
$$\sinh(x) \sim \frac{1}{2}\exp(x) \qquad x \to +\infty$$
$$\frac{\exp(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\exp(x)}{x}\left[1 + O(x^{-2})\right] \qquad x \to +\infty$$

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Volterra*

$$x(t) = \sin(t) + \lambda \int_0^t ds \, \exp(t-s)\, x(s)$$

ridurla a un'equazione differenziale (ordinaria e lineare) del I ordine con condizione iniziale assegnata, e risolverla.

Esercizio 4 *Dimostrare che la successione di funzioni*

$$\theta_n(x) = \frac{1}{1+\exp(-nx)}$$

tende alla funzione a gradino $\theta(x)$.

Utilizzare il risultato per mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f(x) \frac{n\exp(-nx)}{1+\exp(-nx^2)} = f(0)$$

Compito di MMF I del 13/09/2005: II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

con la condizione iniziale $x(0) = (1, 1, 1)^t$*, dove* A *è la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 *Sia* $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^{3}$ *una base ortonormale nello spazio euclideo tridimensionale. Su questa base l'operatore* U *agisce secondo la legge:*

$$\begin{aligned} U\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ U\vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ U\vec{e}_3 &= \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2 + \gamma\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Scrivere la matrice che rappresenta U *nella base in questione. Per quali valori di* α, β, γ U *è una matrice unitaria?*

Esercizio 3 *Dimostrare che*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \det(\exp(A\phi)) = 1$$

per ogni matrice A $N \times N$ *tale che* $A^N = \mathbb{I}$*.*

Compito di esonero di MMF I del 04/11/2005

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Per quale valore del parametro α la seguente funzione è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$?*

$$u(x,y) = x\,\sin(x)\,\cosh(y) + \alpha\,y\,\cos(x)\,\sinh(y)$$

Determinare $f(z)$ a meno di una costante immaginaria e fissare tale costante richiedendo che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} f(z)\,dz = 2 + i\pi$$

Esercizio 2 *Calcolare*

$$\oint_\Gamma dz\,|z|^2$$

dove Γ è il cammino chiuso, simmetrico rispetto all'asse immaginario e percorso in senso antiorario, definito dalle condizioni:

$$\begin{array}{cc} y = 0 & -1 \leq x \leq 1, \\ x = 1 & 0 \leq y \leq 1, \\ y = x & 0 \leq x \leq 1, \\ y = -x & -1 \leq x \leq 0, \\ x = -1 & 0 \leq y \leq 1. \end{array}$$

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di potenze almeno una, a scelta, tra le seguenti funzioni:*

$$F_1(z) = \frac{z}{z^3+1} \qquad \textit{nelle regioni:} \begin{cases} |z| < 1 \\ |z| > 1 \\ 0 < |z - \exp(\frac{i\pi}{3})| < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$F_2(z) = \frac{\cos(z)}{1+z^2} \qquad \textit{nelle regioni:} \begin{cases} |z| < 1 \\ 0 < |z - i| < 2 \end{cases}$$

Giustificare, per ognuno dei casi considerati, il dominio di convergenza indicato.

Esercizio 4 *Calcolare con il metodo dei residui almeno uno tra i seguenti integrali:*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(3\theta)}{1 + a\,\cos(\theta)}\,d\theta \qquad 0 < a < 1$$

Compito di esonero di MMF II del 14/12/2005

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti due integrali:*

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}\, \ln(x)}{1+x^2}$$
$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^2}{\cosh(x)}$$

Esercizio 2 *La funzione $F(x,t)$ è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx - ik^2 t)$$

Si chiede di calcolarla esattamente e in modo approssimato mediante il metodo della fase stazionaria, fermandosi al termine dominante.

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Fredholm omogenea:*

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda \int_0^L ds\, K(t,s)\, x(s) \\ K(t,s) &= \frac{\sin(s)\,\sin(L-t)}{\sin(L)} \qquad t \le s \le L \\ K(t,s) &= \frac{\sin(t)\,\sin(L-s)}{\sin(L)} \qquad 0 \le s \le t \end{aligned}$$

ridurla ad un'equazione differenziale (ordinaria e lineare omogenea) del II ordine con condizioni al contorno assegnate e risolverla.

Esercizio 4 *Nello spazio delle successioni di numeri reali munito della norma:*

$$||\vec{x}|| := \sup |x_k| \qquad k \in \mathbb{N}$$

agisce l'operatore A secondo la legge:

$$A : x_k \to y_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha^{k-l} x_l$$

Per quali valori di α esso è una contrazione?

Compito di MMF II del 06/02/2006

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti 2 integrali:*

$$\int_0^\infty dx \frac{(x^{\frac{1}{3}})\log x}{1+x^2}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\cosh(\alpha x)}$$

Nel secondo esercizio, si consiglia il cambiamento di variabile:

$$\exp(\alpha x) = t$$

.

Esercizio 2 *a) Valutare con un errore inferiore a* $\frac{1}{1000}$ *l'integrale:*

$$\int_0^\infty dt \, \frac{\exp(-10t)}{1+t^2}$$

b) Usando il metodo di Laplace, calcolare il termine dominante, per $x \to \infty$*, dell'integrale*

$$\int_0^L dt \, \exp(-\frac{x}{(\sin(\pi t/L))^2})$$

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Volterra*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^t ds \, (t-s)^2 \, x(s)$$

ridurla a una equazione differenziale (ordinaria e lineare) del III ordine con condizioni iniziali assegnate, e possibilmente risolverla!

Esercizio 4 *Dimostrare che la successione di funzioni*

$$\gamma_n(x) \;\; = \;\; -\frac{2}{\sqrt{\pi}} n^3 x \exp(-n^2 x^2)$$

tende nel senso delle distribuzioni alla derivata della δ*.*

Utilizzare il risultato precedente per mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \gamma_n(x) \, \sin(x-t) \;\; = \;\; -\cos t$$

Esercizio 5 *Sia $\vec{e}_n$, $n = 1, \ldots$ una base ortonormale in l_2. L'operatore A é definito dalla sua azione sui vettori di base:*

$$A\vec{e}_n = \alpha^n(\vec{e}_n + \vec{e}_{n+1})$$

Dare le condizioni sul numero reale α che assicurano che A sia un operatore compatto. Si ricordi la condizione sufficiente $tr A^\dagger A < \infty$.

Esercizio 6 *Determinare la funzione di Green dell'operatore $L = D^2 + 1$ ($D = d/dt$) sulla varieta' lineare delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno $f(0) = f(1) = 0$*

Compito di MMF II del 27/02/2006

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti due integrali:*

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{1+x^2}$$
$$P\int_{-\infty}^\infty dx \, \frac{\sin(kx)}{x-1}$$

Esercizio 2 *La funzione$F(x)$ è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \, \frac{\exp(x(t - t^3/12))}{1+t}$$

Si chiede di calcolarne il termine dominante per $x \to \infty$ mediante il metodo di Laplace.

Esercizio 3 *Nello spazio delle funzioni di modulo quadrato integrabile sulla retta si consideri l'operatore K il cui nucleo $K_\alpha(x,y)$ è dato da:*

$$K_\alpha(x,y) = \exp[-(x^2 + y^2 + \alpha xy)]$$

Dire per quali valori di α l'operatore K è di Hilbert-Schmidt, cioè esiste l'integrale doppio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, |K(x,y)|^2$$

Esercizio 4 *Nello spazio l_2 delle successioni di numeri complessi di modulo quadrato sommabile, munito della norma*

$$||x^2|| := \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$$

agisce l'operatore A secondo la legge:

$$A : x_n \to y_n = x_n + 2x_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1. *Trovare un limite superiore per $||A||$.*

2. *Esistono vettori* $\vec{\xi} \in l_2$ *tali che* $A\vec{\xi} = 0$*?*

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \, \sin(t) \, \delta\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Esercizio 6 *Determinare la funzione (di Green)* $G(x,y)$ *che soddisfa l'equazione differenziale del I ordine:*

$$\frac{\partial G}{\partial x} + x^2 \, G = \delta(x-y)$$

e la condizione al contorno $G(0,y) = G(1,y)$.

Compito di MMF II del 19/06/2006

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti 2 integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{\exp(-\gamma x)}{\cosh x} \quad (Re\gamma > 0)$$
$$I_2 = P\int_0^\infty \frac{x}{\sinh(\alpha x)}$$

Nel secondo esercizio, si consiglia il cambiamento di variabile:

$$\exp(\alpha x) = t$$

.

Esercizio 2 *Usando il metodo della fase stazionaria, calcolare il termine dominante, per $x \to \infty$, dell'integrale*

$$\int_0^\infty dt \exp(-\gamma t + ix \sin t)$$

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Fredholm omogenea:*

$$x(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(|t-s|)\, x(s)\, ds$$

- *ridurla a una equazione differenziale (ordinaria e lineare) del II ordine (4 pt);*
- *risolverla imponendo le condizioni al contorno nascoste nell'equazione integrale (6pt).*

Esercizio 4 *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx\, \frac{\sin(nx)}{x\, \cosh(\alpha x + \beta y)}$$

Esercizio 5 *L'operatore A é definito dalla sua azione su un generico vettore $\vec{x}$ di l_2 dalla formula:*

$$y_n := (A\vec{x})_n = \alpha^n x_n + x_{n-1} \quad (n = 1, \ldots); \quad x_0 = 0.$$

Dimostrare:

- *che per $|\alpha| \leq 1$ A è un operatore limitato, con $||A|| \leq 1 + |\alpha|$ (5pt);*
- *i numeri $\alpha^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ sono autovalori di A (5pt).*

Esercizio 6 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale lineare del I ordine:*

$$x\, f'(x) - \alpha\, f(x) = \delta(x - 1)$$

che soddisfa la condizione al contorno $f(1) = f(e)$.

Compito di esonero di MMF II del 21/12/2006

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno due dei seguenti quattro integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \, \frac{\sinh(ax)}{\exp(px)+1} \qquad p, a \in \mathbb{R}$$
$$I_2 = \int_0^\infty dx \, \frac{\cos(\gamma x)}{x^2 - a^2} \qquad \gamma, a \in \mathbb{R}$$
$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \exp(-p\,\cos(x))\,\cos(p\,\sin(x)) \qquad p \in \mathbb{R}$$
$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \exp(-\mu x) \frac{\sinh(\mu x)}{\sinh \beta x}$$

Esercizio 2 *La funzione $F(x)$ è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \frac{\exp\left(-x\left(t^2 + \frac{g}{t^2}\right)\right)}{1+t^2} \qquad g > 0$$

Si chiede di calcolarne il termine dominante per $x \to \infty$ mediante il metodo di Laplace.

Esercizio 3 *Nello spazio delle funzioni di modulo quadrato integrabile sulla retta si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$ *il cui nucleo $K(t,s)$ è dato da:*

$$K(t,s) = \exp\left[-\mu(t^2+s^2)\right] \qquad \mu > 0$$

e se ne calcoli la norma $||\mathbf{K}||$ definita come:

$$||\mathbf{K}||^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds \, |K(t,s)|^2$$

Esercizio 4 *Si consideri nello spazio delle funzioni di modulo quadrato integrabile sul segmento $[0,1]$, l'equazione di Fredholm omogenea:*

$$x(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds$$

dove:

$$K(t,s) = t(1-s) \qquad 0 \le t \le s$$
$$K(t,s) = s(1-t) \qquad s \le t \le 1$$

1. *A quali condizioni al contorno deve obbedire la soluzione?*
2. *Per quali valori di λ esistono soluzioni non banali?*

Compito di MMF II del 12/02/2007: I modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx\, \frac{\sin(kx)}{\sinh(ax)} \qquad k, a > 0$$
$$I_2 = \int_{-1}^1 dx\, \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\, \frac{1}{1+x^2}$$
$$I_3 = \int_0^{2\pi} dx\, e^{p\ \sin(x)}\ \cos(p\ \cos(x))$$

Esercizio 2 *Dimostrare che*

$$F(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\mathrm{sech(t)}$$

è analitica per $\mathrm{Re}\, z > -1$.

Esercizio 3 *Calcolare i primi termini dello sviluppo asintotico per* $x \to \infty$ *della rappresentazione integrale:*

$$F(x) := \int_0^\infty dt\, e^{-xt}\,\mathrm{sech(t)}$$

Ci si aspetta che lo sviluppo ottenuto sia convergente? e perchè?

Compito di MMF II del 12/02/2007: II modulo

O.Ragnisco

Esercizio 1 *In l_2 si consideri l'operatore:*

$$A = \frac{1}{2}(C + D)$$

cioè l'operatore tale che

$$y_n := Ax_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1}) \qquad (x_0 = 0;\ n = 1, 2, \ldots)$$

Dimostrare che:

1. *A è hermitiano.*
2. *A è limitato e $||A|| = 1$.*

Ci si aspetta che abbia spettro discreto? continuo? residuo?

Esercizio 2 *Calcolare:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\alpha|t|}\delta(\sin(\pi t)) \qquad \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{1}{\pi t(1+t^2)} \left[n\cos(nt) - \frac{\sin(nt)}{t} \right]$$

Esercizio 3 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale del I ordine:*

$$(1 + x)f'(x) - f(x) = \delta(x)$$

che soddisfa le condizioni al contorno

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Compito di MMF II del 18/06/2007

O.Ragnisco

Esercizio 1 *Calcolare almeno uno dei seguenti due integrali:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx\, x\, \exp(-x)\, \coth(x)$$
$$I_2 = \int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{\cosh(x)}$$

Esercizio 2 *La funzione $F(x)$ è definita dalla rappresentazione integrale:*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \frac{\exp\left(-x\left(t^2 + \frac{g}{t^2}\right)\right)}{1+t^2} \qquad g > 0$$

Si chiede di calcolarla esattamente e in modo approssimato mediante il metodo di Laplace, fermandosi al termine dominante.

Esercizio 3 *Data l'equazione integrale di Fredholm omogenea:*

$$x(t) = \lambda \int_0^1 ds\, K(t,s)\, x(s)$$
$$K(t,s) = \cos(\pi s)\, \cos(\pi(1-t)) \qquad 0 \le s \le t$$
$$K(t,s) = \cos(\pi t)\, \cos(\pi(1-s)) \qquad t \le s \le 1$$

ridurla ad un'equazione differenziale (ordinaria e lineare) del II ordine con condizioni al contorno $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(1) = 0$; dire per quali valori di λ essa ammette soluzioni diverse da quella identicamente nulla e costruirle.

Esercizio 4 *Nello spazio delle successioni di numeri reali munito della norma:*

$$||\vec{x}|| := \sup |x_k| \qquad k \in \mathbb{N}$$

agisce l'operatore A secondo la legge:

$$A : x_k \to y_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha^{|k-l|} x_l$$

Per quali valori di α esso è una contrazione?

Esercizio 732