Esercizi di analisi funzionale

A cura di: Fabio Musso, Orlando Ragnisco.

1 Spazi di Hilbert

Esercizio 1 *Data in l^2 la successione di vettori:*

$$\underline{v}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} e^{-k\alpha} \underline{e}^{(k)}, \qquad \alpha > 0,$$

con $\{\underline{e}^{(k)}\}$ base ortonormale,

1. *dimostrare che di Cauchy,*
2. *calcolare la norma di $\underline{v}^{(n)}$ nel limite $n \to \infty$.*

1. Poniamo $n > m$, per definizione si ha:

$$||\underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(m)}||^2 = \left(\underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(m)}, \underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(m)}\right) = \left(\sum_{k=m+1}^{n} e^{-k\alpha} \underline{e}^{(k)}, \sum_{l=m+1}^{n} e^{-l\alpha} \underline{e}^{(l)}\right) =$$

$$= \sum_{k,l=m+1}^{n} e^{-\alpha(k+l)} \left(\underline{e}^{(k)}, \underline{e}^{(l)}\right) = \sum_{k,l=m+1}^{n} e^{-\alpha(k+l)} \delta_{l,k} = \sum_{k=m+1}^{n} e^{-2\alpha k} =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} (e^{-2\alpha})^k = \frac{e^{-2(m+1)\alpha} - e^{-2(n+1)\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}}$$

Per dimostrare che la successione di Cauchy, dobbiamo far vedere che per ogni possibile scelta di ϵ esiste un N_ϵ tale che $n, m > N_\epsilon$ implica:

$$||\underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(m)}||^2 < \epsilon^2$$

cio, ponendo $1 - \exp(-2\alpha) = M$ (si noti che $\alpha > 0$ assicura $M > 0$):

$$||\underline{v}^{(n)} - \underline{v}^{(m)}||^2 = \frac{e^{-2(m+1)\alpha} - e^{-2(n+1)\alpha}}{M} < \frac{e^{-2(m+1)\alpha}}{M} < \epsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2(m+1)\alpha < \ln(\epsilon^2 M) \quad \Rightarrow \quad m > \left[-\frac{\ln(\epsilon)}{\alpha} - \frac{\ln(M)}{2\alpha} - 1\right] = N_\epsilon$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x.

2. Abbiamo:

$$\lim_{n=\infty} ||\underline{v}^{(n)}||^2 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-2k\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2\alpha})^k - 1$$

La serie converge per $\alpha > 0$ e si ha:

$$\lim_{n=\infty} ||\underline{v}^{(n)}||^2 = \frac{1}{1 - e^{-2\alpha}} - 1 = \frac{e^{-2\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}}$$

quindi

$$\lim_{n=\infty} ||\underline{v}^{(n)}|| = \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{1-e^{-2\alpha}}}$$

Esercizio 2 *Il vettore $\vec{v}(z)$ ha componenti $(1, 2z, 3z^2, \ldots, nz^{n-1}, \ldots)$. Si calcoli, se possibile, la traccia della matrice*

$$A \equiv \vec{v}(z)\vec{v}^{\dagger}(z)$$

o quantomeno si indichi il dominio in cui essa e' convergente.

Per definizione:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{\infty}(e_k, Ae_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(e_k, \vec{v}(z))(\vec{v}(z), e_k)$$

con $\{e_k\}$ base ortonormale. Scegliendo come base la base canonica abbiamo:

$$(e_k, \vec{v}(z)) = kz^{k-1} \qquad\qquad (\vec{v}(z), e_k) = k\bar{z}^{k-1}$$

quindi

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |z|^{2(k-1)}$$

che pu essere ricondotta alla serie geometrica e quindi converge per $|z| < 1$. Infatti:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x^2} = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k$$

Sfruttando l'uniforme convergenza della serie geometrica (per $|x| < 1$) possiamo derivare la serie termine a termine:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}2k(x^{2k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty}2k(2k-1)(x^2)^{k-1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}4k^2(x^2)^{k-1} - \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}2kx^{2k-1} = 4\sum_{k=1}^{\infty}k^2(x^2)^{k-1} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2}$$

Se ne deduce che:

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(x^2)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} + \frac{2}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^3}$$

Quindi la traccia di A esiste per $|z| < 1$ e, in tale dominio, vale:

$$\mathrm{Tr}(A) = \frac{1+|z|^2}{(1-|z|^2)^3}$$

Esercizio 3 *Per quali valori della variabile complessa z la successione*

$$x_n = \mathrm{Tr}\,(A^n)\,, \qquad A = z\sigma_1 + i\sigma_3,$$

appartiene a l^2*?*

Esercizio 4 *Ortonormalizzare le funzioni*

$$\cos^4 x, \qquad \sin^2 x, \qquad 1,$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \frac{1}{||1||} \\
\vec{e}_2 &= \frac{\sin^2 x - (\vec{e}_1, \sin^2 x)\vec{e}_1}{||\sin^2 x - (\vec{e}_1, \sin^2 x)\vec{e}_1||} \\
\vec{e}_3 &= \frac{\cos^2 x - (\vec{e}_1, \cos^2 x)\vec{e}_1 - (\vec{e}_2, \cos^2 x)\vec{e}_1}{||\cos^2 x - (\vec{e}_1, \cos^2 x)\vec{e}_1 - (\vec{e}_2, \cos^2 x)\vec{e}_2||}
\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$||1||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$$

quindi

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Nel prosieguo ci serviranno integrali della forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(x)\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(x)\, dx$$

Innanzitutto notiamo che i due integrali sono uguali

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n}(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(x)\, dx$$

in virt del fatto che $\sin(x) = \cos(x + \pi/2)$ e che stiamo integrando su un intero periodo. Facendo l'usuale cambiamento di variabile $z = \exp(ix)$, $dx = -idz/z$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(x)\, dx = -i \oint \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \frac{-i}{2^{2n}} \oint \sum_{k=0}^{2n} \left(\begin{array}{c} 2n \\ k \end{array} \right) z^{2(k-n)-1} dz =$$
$$= \frac{-i}{2^{2n}} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) 2\pi i = \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

Abbiamo quindi

$$\vec{e}_2 = \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx}{||\sin^2 x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx||} = \frac{\sin^2 x - 1/2}{||\sin^2 x - 1/2||}$$

Determiniamo il fattore di normalizzazione:

$$||\sin^2 x - 1/2||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{\pi}{4}$$

da cui

$$\vec{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sin^2 x - 1/2\right)$$

Analogamente per $\vec{e}_3$ avremo:

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}_3}{||\vec{y}_3||}$$

con

$$\begin{aligned}
\vec{y}_3 &= \cos^4 x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x\, dx - \frac{4}{\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\cos^4 x\, dx = \\
&= \cos^4 x - \frac{3}{8} - \frac{4}{\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos^2 x\right)\cos^4 x\, dx = \\
&= \cos^4 x - \frac{3}{8} - \frac{4}{\pi}\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi\right) = \\
&= \cos^4 x + \sin^2 x - \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

Per il fattore di normalizzazione abbiamo:

$$||\vec{y}_3|| = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_3 = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\cos^4 x + \sin^2 x - \frac{7}{8}\right)$$

Esercizio 5 *Ortonormalizzare le funzioni* x, x^2, x^3 *nell'intervallo* $[-1, 1]$.

Esercizio 6 *Siano* $v(z)$ *e* $w(z)$ *i due vettori di* l^2 *le cui componenti sono, rispettivamente,*

$$v_n(x) = z^{-n}, \qquad w_n(x) = (1+z)^n.$$

Per quali valori di z *esiste*

$$f(z) = \mathrm{Tr}\left[v(z)v^\dagger(z) + w(z)w^\dagger(z)\right]?$$

Esercizio 7 *Per quali valori di c la funzione*

$$\frac{e^{-x}\sin(cx)}{x+c}$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,\infty]}$*?*

Dobbiamo studiare la convergenza dell'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x}\sin(cx)^2}{(x+c)^2}$$

Se $c > 0$ la funzione integranda non ha singolarit al finito, sufficiente quindi dimostrare la convergenza dell'integrale in un intorno dell'infinito. Condizione sufficiente perch tale integrale converga che la funzione integranda vada a zero pi rapidamente di $1/x$ (la condizione anche necessaria quando la funzione integranda ammette limite all'infinito). Nel nostro caso:

$$\frac{e^{-2x}\sin(cx)^2}{(x+c)^2} \leq \frac{1}{(x+c)^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad x \to \infty$$

Quindi per $c > 0$ la nostra funzione appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,\infty]}$.

Se $c \leq 0$ la singolarit in $x = -c$ interna o sulla frontiera del cammino d'integrazione. Condizione necessaria e sufficiente perch l'integrale esista che la funzione integranda diverga al pi come $1/(x+c)^p$ con $p < 1$ nell'intorno di $x = -c$. Se $c \neq -\sqrt{n\pi},\ n \in \mathbb{N}$, allora $e^{-2x}\sin(cx)^2 > 0$ e la funzione integranda diverge come $1/(x+c)^2$ e quindi non integrabile nell' intorno di $x = -c$. D'altra parte, se $c = -\sqrt{n\pi},\ n \in \mathbb{N}$, usando due volte la regola di de l'Hopital abbiamo:

$$\lim_{x\to\sqrt{n\pi}} \frac{\sin^2(\sqrt{n\pi}x)}{(x-\sqrt{n\pi})^2} = \lim_{x\to\sqrt{n\pi}} \frac{\sqrt{n\pi}\sin(\sqrt{n\pi}x)\cos(\sqrt{n\pi}x)}{(x-\sqrt{n\pi})} =$$
$$= \lim_{x\to\sqrt{n\pi}} \cos^2(\sqrt{n\pi}x) - \sin^2(\sqrt{n\pi}x) = 1$$

Quindi la funzione integranda ha una singolarit eliminabile al finito per $c = -\sqrt{n\pi},\ n \in \mathbb{N}$

Concludendo, la funzione

$$\frac{e^{-x}\sin(cx)}{x+c}$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,\infty]}$ per $c = -\sqrt{n\pi},\ n \in \mathbb{N}$ o $c > 0$.

Esercizio 8 *Dire per quali valori del parametro reale c le seguenti funzioni sono di modulo quadrato sommabile nell'intervallo indicato:*

1. $f(x) = \dfrac{\exp(-cx)}{(1-2cx-x^2)^{\frac{c}{2}}}, \qquad x \in [0,+\infty)$*;*

2. $f(x) = \dfrac{\sinh(cx)\exp(-|x|)}{x^{2c}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Esercizio 9 *Sviluppare in polinomi di Hermite la funzione:*

$$f(x) = e^x.$$

I polinomi di Hermite costituiscono una base dello spazio $L_2^w(-\infty, +\infty)$ delle funzioni quadrato integrabili sulla retta reale rispetto al peso $w(x) = \exp(-x^2)$. Poich $f(x)$ appartiene a questo spazio possiamo svilupparla in polinomi di Hermite. I coefficienti dello sviluppo saranno dati da:

$$c_n = \langle f(x)|\alpha_n H_n(x)\rangle = \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} e^x H_n(x)$$

dove gli α_n sono i coefficienti di normalizzazione.

Utilizziamo la formula di Rodriguez:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Quindi:

$$c_n = (-1)^n \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} e^x e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^n \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Possiamo ora integrare per parti, sfruttando il fatto che $\exp(-x^2)$ si annulla per x che tende a $\pm\infty$ insieme a tutte le sue derivate,

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^x \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right) = \ \ldots \ = \\
&= (-1)^{2n} \alpha_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2+x} = \alpha_n e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2+x-\frac{1}{4}} = \\
&= \alpha_n e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-(x-\frac{1}{2})^2} = \alpha_n e^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

I coefficienti di normalizzazione α_n sono dati da:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$$

Quindi per i coefficienti c_n otteniamo infine:

$$c_n = \frac{\exp(\frac{1}{4})}{2^n n!}$$

Esercizio 10 *Dire per quali valori di* $\lambda \in \mathbb{C}$ *la funzione:*

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{|x^2 - 4\lambda x + 1|^{\frac{\lambda}{2}}}$$

appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,+\infty]}$.

Esercizio 11 *Trovare per quali valori del parametro reale* c *le seguenti funzioni appartengono allo spazio indicato:*

1. $f_1(x) = \dfrac{x^c(1-x^2)}{\sin(\pi x)(1-cx)}, \qquad f_1(x) \in \mathcal{L}^2_{[0,1]}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{c}\right)\sinh(4x)\ln|\tanh(cx)|}{x^2(c^2-x^2)}, \qquad f_2(x) \in \mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$

Esercizio 12 *Calcolare i valori di* c *per i quali le seguenti funzioni sono ortogonali a* $f(x) = \cos(\pi x)$ *nell'intervallo* $[-1,1]$*:*

1. $g_1(x) = x + ic\sin(\pi x)$
2. $g_2(x) = \sin(cx)$.

Esercizio 13 *Sia* $f_1 = 1,\ f_2 = 1+t,\ f_3 = 1+t+t^2$, *e*

$$(f_i, f_j) = \int_{-1}^{1} f_i(t) f_j(t) dt.$$

Costruire tre combinazioni lineari ortonormali di f_1, f_2, f_3.

Esercizio 14 *Trovare le soluzioni dell'equazione:*

$$\left(\frac{d}{dx} + 2x\right)\left(\frac{d}{dx} + 1\right) f(x) = 0$$

appartenenti a $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$.

Abbiamo una equazione del tipo:

$$ABf(x) = 0$$

con A e B due operatori differenziali lineari. Le soluzioni dell'equazione corrisponderanno a

$$f(x) \in \operatorname{Ker} B \qquad \text{oppure} \qquad f(x) \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B$$

Nel primo caso abbiamo:

$$f'(x) + f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = ce^{-x}$$

e tale funzione appartiene ad $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$ solo per $c = 0$.

Consideriamo il secondo caso. Sia $F(x) \in \operatorname{Im} B$, allora $F(x)$ deve soddisfare l'equazione:

$$\left(\frac{d}{dx} + 2x\right) F(x) = 0$$

Cio:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = -2x \ \Rightarrow \ \ln(F(x)) + c_0 = -x^2 \ \Rightarrow \ F(x) = c_1 e^{-x^2}$$

con c_1 costante arbitraria.

La condizione

$$F(x) \in \operatorname{Im} B$$

si traduce in

$$f'(x) + f(x) = c_1 e^{-x^2}$$

La soluzione generale di questa equazione sar data dalla soluzione generale dell'equazione omogenea

$$f'(x) + f(x) = 0$$

che abbiamo gi visto essere $f(x) = c_2 e^{-x}$ pi una soluzione particolare della non omogenea. Per trovare la soluzione della non omogenea utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Poniamo $f(x) = a(x)e^{-x}$, dalla non omogenea otteniamo:

$$a'(x) = c_1 e^{-x^2+x} \qquad \Rightarrow \qquad a(x) = c_1 \int_{x_0}^{x} e^{-y^2+y}\, dy$$

dove x_0 pu essere scelto arbitrariamente. Scegliamo $x_0 = 1/2$, avremo:

$$a(x) = c_1 e^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{x} e^{-(y-1/2)^2}\, dy = c_1 e^{\frac{1}{4}} \int_{0}^{x-1/2} e^{-y^2}\, dy = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{1}{4}} \operatorname{erf}(x-1/2)$$

Quindi

$$f(x) \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \left(c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{1}{4}} \operatorname{erf}(x-1/2) + c_2\right) e^{-x}$$

$f(x)$ una funzione continua (l'error function una funzione continua e limitata sull'intero asse reale), per determinare se appartiene a $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$ quindi sufficiente studiare il suo andamento a $x = \pm\infty$. Per $x \to +\infty$, poich

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$$

$f(x)$ tende a zero esponenzialmente e quindi sar quadrato integrabile nell'intorno di $x = +\infty$ per qualunque scelta delle costanti c_1 e c_2.

Per $x \to -\infty$, il termine e^{-x} diverge esponenzialmente. Possiamo sfruttare l'arbitrariet nella scelta delle costanti c_1 e c_2 per rendere la funzione $f(x)$ quadrato integrabile anche nell'intorno di $-\infty$, ma per far ci abbiamo bisogno dello sviluppo asintotico dell'error function. Poich

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{erf}(x - 1/2) = -1$$

il primo termine dello sviluppo sar proprio -1. Proviamo a determinare il secondo termine dello sviluppo usando l'Hopital. Abbiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{erf}(x - 1/2) + 1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x-1/2} e^{-y^2}\, dy + 1 = 0$$

Consideriamo il limite del rapporto

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x-1/2} e^{-y^2}\, dy + 1}{h(x)}$$

con $h(x)$ tendente a zero per $x \to -\infty$. Allora (se il limite a secondo membro esiste)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x-1/2} e^{-y^2}\, dy + 1}{h(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1/2)^2}}{h'(x)}$$

Richiediamo ora che il limite a secondo membro sia uguale a 1, cio $h'(x) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1/2)^2}$ per $x \to -\infty$. E' chiaro che la funzione:

$$h(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}(x - 1/2)} e^{-(x-1/2)^2}$$

soddisfa questa richiesta

$$h'(x) = \frac{e^{-(x-1/2)^2}}{\sqrt{\pi}} \left(2 + \frac{1}{(x - 1/2)^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1/2)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{x^2} \right) \right) \qquad x \to -\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{x-1/2} e^{-y^2}\, dy + 1}{-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}(x - 1/2)} e^{-(x-1/2)^2}} = 1$$

da cui segue che:

$$\mathrm{erf}(x - 1/2) \simeq -1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}(x - 1/2)} e^{-(x-1/2)^2} \qquad x \to -\infty$$

Sostituendo in $f(x)$ abbiamo:

$$f(x) \simeq \left(c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{1}{4}} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}(x-1/2)} e^{-(x-1/2)^2} \right) + c_2 \right) e^{-x} \qquad x \to -\infty$$

Scegliendo

$$c_2 = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{1}{4}}$$

annulliamo il termine proporzionale a e^{-x} che diverge esponenzialmente e ci rimane

$$f(x) \simeq -\frac{c_1}{(x-1/2)} e^{-x^2} \qquad x \to -\infty$$

che converge a zero per $x \to -\infty$ pi rapidamente di ogni potenza.

Concludendo, le soluzioni dell'equazione:

$$\left(\frac{d}{dx} + 2x \right) \left(\frac{d}{dx} + 1 \right) f(x) = 0$$

che appartengono a $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$ sono della forma:

$$f(x) = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\mathrm{erf}(x-1/2) + 1 \right) e^{-x+1/4}$$

2 Funzionali lineari e distribuzioni

Esercizio 15 *Determinare la norma del funzionale $f : l^2 \to \mathbb{C}$ definito da:*

$$f\left(\underline{e}^{(k)} \right) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

(Si ricordi che $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)|$).

Esercizio 16 *Data la successione di funzionali lineari:*

$$f_n(x) = x_n + \frac{1}{n} x_{n+1},$$

calcolare le norme $||f_n||$ nei seguenti casi:

1. $||x|| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$;
2. $||x|| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$;
3. $||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Determinare, nei tre casi, il limite: $\lim_{n\to\infty} ||f_n||$.

Ricordiamo che
$$||f_n|| = \sup_{||x||=1} |f_n(x)|$$
1. Nel caso della norma sup, la condizione $||x|| = 1$ implica $|x_n| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$, ma allora:
$$||f_n|| = \sup_{||x||=1} |x_n + \frac{1}{n}x_{n+1}| \leq \sup_{||x||=1} |x_n| + \frac{1}{n}|x_{n+1}| \leq 1 + \frac{1}{n}$$
Il segno di uguaglianza vale se $x_n = x_{n+1} = \pm 1$ e quindi
$$||f_n|| = 1 + \frac{1}{n}$$
2. Nel caso della norma l_1 la condizione $||x|| = 1$ implica $|x_n| + |x_{n+1}| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$, e quindi $|x_{n+1}| \leq 1 - |x_n|$. Quindi:
$$\begin{aligned} ||f_n|| &= \sup_{||x||=1} |x_n + \frac{1}{n}x_{n+1}| \leq \sup_{||x||=1} |x_n| + \frac{1}{n}|x_{n+1}| \leq \\ &\leq \sup_{||x||=1} |x_n| + \frac{1}{n}(1 - |x_n|) = \sup_{||x||=1} |x_n|\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \leq 1 \end{aligned}$$
(avendo usato il fatto che $|x_n| \leq 1$). Il segno di uguaglianza si ottiene scegliendo il vettore di componenti $x_k = \pm\delta_{kn}$. Quindi
$$||f_n|| = 1$$
3. Poich l_2 uno spazio di Hilbert separabile e completo, possiamo scrivere il funzionale f_n sotto forma di prodotto scalare:
$$f_n(x) = x_n + \frac{1}{n}x_{n+1} = (e_n + \frac{1}{n}e_{n+1}, x)$$
dove abbiamo indicato con e_i i vettori della base duale. Utilizzando il fatto che lo spazio duale a l_2 ancora l_2, la norma del funzionale f_n sar data da:
$$||f_n|| = \sqrt{(e_n + \frac{1}{n}e_{n+1}, e_n + \frac{1}{n}e_{n+1})} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$
Notiamo che in tutti e tre i casi si ha: $\lim_{n\to\infty} ||f_n|| = 1$.

Esercizio 17 *Data la successione di funzionali lineari in* l^1*:*
$$f_n(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} x_k,$$
dire se la successione numerica $\{||f_n||\}_{n=1}^{\infty}$ *converge, e, in caso affermativo, calcolarne il limite.*

Esercizio 18 *Si calcoli il limite per $n \to \infty$ nel senso delle distribuzioni delle seguenti successioni di funzioni:*

1. $f_n(x) = e^{-nx}$,
2. $f_n(x) = ne^{-nx}$,
3. $f_n(x) = e^{-x/n}$.

Come spazio di funzioni di prova si prenda $\mathcal{L}^1_{[0,\infty]}$

Esercizio 19 *A che cosa converge (nel senso delle distribuzioni) la successione:*

$$f_n(x) = \frac{1}{\alpha e^{nx} + 1}, \qquad \alpha > 0$$

per $n \to \infty$?

Consideriamo innanzitutto il limite puntuale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha e^{nx} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{per } x > 0 \\ 1 & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{\alpha+1} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Il limite puntuale suggerisce quindi che i funzionali $f_n(x)$ convergano alla distribuzione $\theta(-x)$ per $n \to 0$ (il valore assunto in $x = 0$ irrilevante perch non cambia il valore che si ottiene applicando il funzionale a una qualsiasi funzione).

Verifichiamo che questo limite sia effettivamente esatto. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{\alpha e^{nx} + 1} dx$$

con $g(x)$ appartenente ad un opportuno spazio di prova.

Abbiamo che

$$\begin{cases} \alpha e^{nx} < 1 & \text{per } x < -\frac{\ln \alpha}{n} \\ \alpha e^{nx} > 1 & \text{per } x > -\frac{\ln \alpha}{n} \end{cases}$$

Dividiamo l'intervallo d'integrazione in due parti:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{\alpha e^{nx} + 1} dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\ln \alpha}{n} - \epsilon} \frac{g(x)}{\alpha e^{nx} + 1} dx + \int_{-\frac{\ln \alpha}{n} + \epsilon}^{\infty} \frac{g(x)}{\alpha e^{nx} + 1} dx \right)$$

e consideriamo i due termini separatamente. Poich nel primo integrale $\alpha e^{nx} < 1$ possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{\ln \alpha}{n} - \epsilon} \frac{g(x)}{\alpha e^{nx} + 1} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\ln \alpha}{n} - \epsilon} g(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\alpha e^{nx})^k dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{\ln \alpha}{n} - \epsilon} g(x) dx + \int_{-\infty}^{-\frac{\ln \alpha}{n} - \epsilon} g(x) \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha)^k e^{nkx} dx$$

Mostriamo che, se $|g(x)|$ limitato su tutto $\mathbb{R}$, allora l'integrale contenente la serie ci d contributo infinitesimo. Infatti, utilizzando l'uniforme convergenza della serie geometrica, possiamo integrare la serie termine a termine, ottenendo:

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac{\ln\alpha}{n}-\epsilon} g(x)\sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k e^{nkx}dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k \int_{-\infty}^{-\frac{\ln\alpha}{n}-\epsilon} g(x)e^{nkx}dx\right| \leq$$
$$\leq \sup(|g(x)|)\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k \int_{-\infty}^{-\frac{\ln\alpha}{n}-\epsilon} e^{nkx}dx\right| = \frac{\sup(|g(x)|)}{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}e^{-nk\epsilon}\right| \leq$$
$$\leq \frac{\sup(|g(x)|)}{n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\right|$$

L'ultima serie convergente per il criterio di Leibnitz sulle serie a segni alterni, e in particolare, ricordando lo sviluppo in serie $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$, vediamo che converge a $-\ln(2)$. Avremo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{-\infty}^{-\frac{\ln\alpha}{n}-\epsilon} g(x)\sum_{k=1}^{\infty}(-\alpha)^k e^{nkx}dx\right| \leq \lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sup(|g(x)|)\ln(2)}{n} = 0$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{-\frac{\ln\alpha}{n}+\epsilon}^{\infty}\frac{g(x)}{\alpha e^{nx}+1}dx$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\alpha e^{nx})^{-1}$, otteniamo:

$$\int_{-\frac{\ln\alpha}{n}+\epsilon}^{\infty}\frac{g(x)}{\alpha e^{nx}+1}dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\ln\alpha}{n}+\epsilon}^{\infty}\frac{g(x)e^{-nx}}{1+\frac{1}{\alpha e^{nx}}}dx$$

Possiamo ora utilizzare nuovamente la serie geometrica ottenendo:

$$\int_{-\frac{\ln\alpha}{n}+\epsilon}^{\infty}\frac{g(x)}{\alpha e^{nx}+1}dx = \int_{-\frac{\ln\alpha}{n}+\epsilon}^{\infty} g(x)\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^k e^{-nkx}$$

La dimostrazione che quest'integrale d contributo infinitesimo completamente analoga alla precedente.

In conclusione:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{\alpha e^{nx}+1}dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\frac{\ln\alpha}{n}-\epsilon} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha e^{nx}+1} = 1-\theta(x) = \theta(-x)$$

nello spazio di funzioni di prova

$$\{g(x):\ \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| < \infty\}$$

Esercizio 20 *In l^2 (reale) si consideri la successione di funzionali lineari dati da:*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^l x_l \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri:

1. *Per $\alpha < 1$ $\{f^{(n)}\}$ converge in norma a $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^l x_l$; si calcoli $||f||$.*
2. *per $\alpha \geq 1$ la successione $\{f^{(n)}\}$ diverge in norma.*

Esercizio 21 *Si calcoli il limite, nel senso delle distribuzioni, della successione:*

$$f_n(t) = \frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}.$$

(Come spazio di funzioni di prova, si prenda ad esempio l'insieme delle funzioni in $\mathcal{L}^1_{[-\infty,+\infty]}$ e continue in $t = 0$ insieme alle loro derivate prime (<u>non credo che basti</u>)).

Quanto vale $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k)$?

Dobbiamo calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nt}g(t)\,dt + \frac{n^2}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-nt}g(t)\,dt\right)$$

Supponendo $g(t)$ derivabile possiamo integrare per parti:

$$-\frac{n^2}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nt}g(t)\,dt = -\frac{n}{2}e^{nt}g(t)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nt}g'(t)\,dt$$

$$\frac{n^2}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-nt}g(t)\,dt = -\frac{n}{2}e^{-nt}g(t)\Big|_{0}^{\infty} + \frac{n}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-nt}g'(t)\,dt$$

Vogliamo che i termini in $\pm\infty$ si annullino nel limite $n \to \infty$, questo equivalente a richiedere che $g(t) = O(e^{\alpha|t|}),\ t \to \pm\infty$ per qualche costante α. Infatti, sotto tale ipotesi:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\left|\frac{n}{2}e^{nt}g(t)\right| \leq \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\frac{n}{2}e^{(n-\alpha)t} = 0$$

e un ragionamento analogo vale per il termine in $+\infty$.

Sotto tali ipotesi otteniamo quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nt}g'(t)\,dt + \frac{n}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-nt}g'(t)\,dt\right)$$

Se anche $g'(t)$ derivabile possiamo integrare nuovamente per parti, ottenendo:

$$\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nt} g'(t)\,dt = \frac{1}{2}e^{nt}g'(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{nt}g''(t)\,dt$$

$$\frac{n}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-nt} g'(t)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-nt}g'(t)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-nt}g''(t)\,dt$$

Di nuovo vogliamo che i termini di bordo in $\pm\infty$ si annullino, dobbiamo quindi richiedere $g'(t) = O(e^{\alpha|t|}),\ t \to \pm\infty$ e sotto tale ipotesi otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}g(t)\,dt = g'(0) + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{nt}g''(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-nt}g''(t)\,dt\right)$$

Dimostriamo ora che i due integrali rimanenti si annullano nel limite $n \to \infty$ se

1. $g''(t) = O(e^{\alpha|t|}),\ t \to \pm\infty,$
2. $g''(t)$ integrabile su ogni sottointervallo finito dell'asse reale,
3. $g''(t)$ continua in $t = 0,$

Avremo allora:

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{nt}g''(t)\,dt\right| \le \left|\int_{-\infty}^{-M} e^{nt}g''(t)\,dt\right| + \left|\int_{-M}^{-\epsilon} e^{nt}g''(t)\,dt\right| + \left|\int_{-\epsilon}^{0} e^{nt}g''(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{-M} e^{nt}|g''(t)|\,dt + \max_{t\in[-M,-\epsilon]} e^{nt}\left|\int_{-M}^{-\epsilon} g''(t)\,dt\right| + \left|\int_{-\epsilon}^{0} g''(t)\,dt\right|$$

Il primo di questi tre integrali si annulla nel limite $n \to \infty$ per la propriet 1. Infatti, da questa segue che esiste un $M > 0$ tale che per $t \le -M$ e per qualche costante $C > 0$ valga

$$|g''(t)| \le Ce^{-\alpha t}$$

ma allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-M} e^{nt}|g''(t)|\,dt \le \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-M} e^{(n-\alpha)t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\,(\frac{1}{n-\alpha}e^{(n-\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{-M} = 0$$

Il secondo integrale si annulla grazie alla propriet 2, mentre il terzo si annulla per la propriet 3 e per l'arbitrariet della scelta di ϵ. L'annullarsi dell'integrale tra 0 e ∞ si dimostra in maniera completamente analoga.

Concludendo abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|}g(t)\,dt = g'(0)$$

cio, ricordando che per una distribuzione D si ha per definizione $D'(g) = -D(g')$ (cfr. eq. [4.216])

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\mathrm{sgn(t)}e^{-n|t|} = -\delta'(t)$$

Dalla definizione di trasformata di Fourier per le distribuzioni (cfr. eq. [4.519]) si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{-ikt}$$

Notiamo che la funzione e^{-ikt} soddisfa tutte le richieste che abbiamo imposto alla funzione $g(t)$ sopra, varr quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) e^{-ikt} = \left. \frac{d}{dt} e^{-ikt} \right|_{t=0} = -(ik)$$

che coincide con la trasformata di Fourier di $-\delta'(t)$ (cfr. eq. [4.521]).

Esercizio 22 *Determinare la somma, nel senso delle distribuzioni, della serie:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\theta),$$

dove lo spazio delle funzioni di prova l'insieme delle funzioni $C^{\infty}_{[-\pi,\pi]}$ *che soddisfano condizioni periodiche agli estremi insieme a tutte le loro derivate.*

Esercizio 23 *Data la successione di funzionali lineari su* $C_{[-1,1]}$

$$f^{(n)}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, g^{(n)}(t) x(t); \qquad g^{(n)}(t) = \begin{cases} -1 & t < -1/n \\ nt & t \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$$

mostrare che essa converge, nella norma naturale su $C^*_{[-1,1]}$, *al funzionale*

$$\bar{f}(x) = \int_{-1}^{1} dt\, \mathrm{sgn}(t) x(t).$$

Esercizio 24 *Si dimostri la formula:*

$$i\pi\delta(x) = \lim_{n\to\infty} P \frac{e^{inx}}{x}.$$

Esercizio 25 *In* l_1 *si consideri la successione di funzionali lineari:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k}$$

Si determini il limite $f(x)$ *di questa successione e la sua norma in* l_1^*.

Esercizio 26 *Si dimostri che (in un opportuno spazio di funzioni di prova) vale la relazione:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 e^{int} = -2\pi\delta''(t), \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Esercizio 27 *Dimostrare che il limite in norma della successione di funzionali lineari su $C_{[0,1]}$ definiti come:*

$$f_n(x) = \int_0^1 dt\, x(t)(1 - e^{-nt})$$

zero.

Esercizio 28 *Data la successione di funzionali lineari su $C_{[-1,1]}$:*

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 dt\, |t|^n x(t),$$

1. *trovarne il limite per $n \to \infty$*
2. *dimostrare che la successione $g_n(x) = n \int_{-1}^1 dt\, |t|^n x(t)$ non tende a zero.*

1. Mostriamo che i funzionali lineari $f_n(x)$ tendono a zero. Infatti $x(t)$ continua e quindi ammette massimo su ogni intervallo chiuso e si ha:

$$\left| \int_{-1}^0 dt\, |t|^n x(t) \right| \leq \max_{t\in[-1,0]} |x(t)| (-1)^n \int_{-1}^0 dt\, t^n = \frac{1}{n+1} \max_{t\in[-1,0]} |x(t)|$$

$$\left| \int_0^1 dt\, |t|^n x(t) \right| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \int_0^1 dt\, t^n = \frac{1}{n+1} \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

da cui segue immediatamente:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{-1}^1 dt\, |t|^n x(t) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\left| \int_{-1}^0 dt\, |t|^n x(t) \right| + \left| \int_0^1 dt\, |t|^n x(t) \right| \right) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left(\max_{t\in[-1,0]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \right) = 0$$

2. Consideriamo l'azione dei funzionali $g_n(x)$ sul vettore $x(t) \equiv 1$ dello spazio $C_{[-1,1]}$. Abbiamo:

$$g_n(1) = n \int_{-1}^1 dt\, |t|^n = 2n \int_0^1 dt\, t^n = \frac{2n}{n+1}$$

cosicch si ha:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(1) = 2$$

da cui segue che la successione dei funzionali lineari $g_n(x)$ non pu tendere al funzionale nullo.

Esercizio 29 *Qual il limite della successione di distribuzioni:*

$$P\,\frac{e^{int}}{t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

nello spazio delle funzioni di prova holderiane nell'origine e tali che il rapporto incrementale

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

sia assolutamente integrabile sulla retta?

Esercizio 30 *Calcolare, nel senso delle distribuzioni, la somma della serie:*

$$S(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 e^{in\theta}$$

prendendo, ad esempio, come spazio di funzioni di prova le funzioni $C^{\infty}[-\pi, \pi]$ periodiche con tutte le loro derivate.

Esercizio 31 *Dimostrare che la successione di funzionali lineari:*

$$f_{(n)}(\underline{x}) := \sum_{j=1}^{n} x_j$$

converge se $\underline{x} \in l_1$, ma non converge se $\underline{x} \in l_2$.

Per $\underline{x} \in l_1$, calcolare il limite $f(\underline{x})$ della successione e la sua norma.

Esercizio 32 *Le funzioni $f_n(x)$ sono definite dalla relazione di ricorrenza:*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x - y) f_{n-1}(y) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

con $f_0(x) = \theta(x)$, dove $\theta(x)$ la funzione a gradino:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Dimostrare la formula

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\theta(x).$$

Procediamo per induzione. Se $n = 1$ abbiamo:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x-y)\theta(y) = \int_0^{\infty} dy\, \theta(x-y)$$

Ora se $x < 0$, allora l'argomento della funzione theta nell'integrale sempre negativo e quindi $f_1(x) = 0$, se invece $x \geq 0$, allora l'argomento della funzione theta positivo per $y < x$, quindi

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} dy\, \theta(x-y) = \int_0^{x} dy = x$$

Possiamo quindi scrivere

$$f_1(x) = x\theta(x)$$

e la formula verificata per $n = 1$.

Dimostriamo ora che se la formula vale per $n-1$ allora vale anche per n. Supporremo quindi

$$f_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}}{n!}\theta(x).$$

Allora per $f_n(x)$ avremo:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x-y)\frac{y^{n-1}}{n!}\theta(y) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} dy\, \theta(x-y)y^{n-1}$$

Nuovamente, se $x < 0$, allora l'argomento della theta sempre negativo e l'integrale si annulla, mentre se $x > 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} dy\, \theta(x-y)y^{n-1} = \frac{1}{n!}\int_0^{x} dy\, y^{n-1} = \frac{x^n}{n!}$$

Possiamo allora scrivere

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\theta(x).$$

Esercizio 33 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} dt\, e^t \delta(\sin t).$$

Esercizio 34 *Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni, vale la formula:*

$$\lim_{N\to\infty} e^{iNt}\frac{\sin t}{t} = 0.$$

Esercizio 35 *Calcolare:*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(nt)\ (1+t^2)^{-1/2}.$$

Esercizio 36 *I funzionali lineari* $f_n(\mathbf{x})$ *su* l^2 *sono definiti dalla relazione:*

$$f_n(\mathbf{x}) \ = \ (-1)^n x_n$$

Dire se sono limitati e calcolarne la norma; dire se formano una successione convergente.

Esercizio 37 *Si calcoli la norma in* $L^2_{[-\infty,+\infty]}$ *dei funzionali lineari* D_n *definiti dalla formula:*

$$D_n(f) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(-n^2t^2\right) f(t).$$

Esercizio 38 *Determinare il limite nel senso delle distribuzioni della successione :*

$$D_n(x) = \int_{-n}^{n} dk \cos(kx)\,.$$

Esercizio 39 *Si dimostri che in un opportuno spazio di funzioni di prova vale la relazione:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \exp(int) = -2\pi\delta^{''}(t)$$

Esercizio 40 *Si calcoli l' integrale:*

$$\int_0^{n\pi} dx \delta(\sin x) \exp(-x)$$

Esercizio 41 *La successione di funzioni* $\delta_n(x) = (n/2)\exp(-n|t|)$ *"tende" alla "delta" di dirac (perche'?). Sfruttando questa proprieta' calcolare:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n'(x) \exp[-(x-a)^2]$$

2.1 Equazioni differenziali per distribuzioni

Esercizio 42 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$16x^2 f''(x) + 3f(x) = \delta(x^2 - 1).$$

Suggerimento: si cerchi la soluzione dell'omogenea nella forma x^α.

Possiamo riscrivere l'equazione differenziale omogenea nella forma:

$$(16x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3) f(x) = A f(x) = 0$$

A un operatore differenziale lineare e omogeneo di grado zero. Un polinomio in x e d/dx

$$P(x, d/dx) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^{\alpha_i} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\beta_i} \qquad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$$

si dice omogeneo di grado γ se

$$\alpha_i - \beta_i = \gamma \qquad i = 1, \ldots, N \quad \gamma \in \mathbb{Z}$$

E' immediato verificare che

$$P(x, d/dx)\, x^\alpha = c\, x^{\alpha+\gamma}$$

per qualche costante c. Nel nostro caso $\gamma = 0$ ed quindi naturale cercare la soluzione dell'equazione omogenea nella forma:

$$f(x) = c\, x^\alpha$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$(16\alpha(\alpha - 1) + 3)\, c\, x^\alpha = 0$$

abbiamo quindi le due possibili scelte per α:

$$\alpha = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{32} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea sar quindi:

$$f^o(x) = c_1\, x^{\frac{3}{4}} + c_2\, x^{\frac{1}{4}}$$

Dobbiamo ora trovare una soluzione particolare della non omogenea. Innanzitutto usiamo l'equazione [4.250] per la delta di funzione per ricavare:

$$\delta(x^2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\delta(x + 1) + \delta(x - 1)\right)$$

Abbiamo quindi una somma di due termini sorgenti di tipo delta. Per un equazione differenziale del secondo ordine con un unico termine sorgente di tipo $\delta(x-x_0)$ (cfr. eq [4.283]) sappiamo che la soluzione particolare della non omogenea va cercata nella forma (eq [4.284]):

$$y_p(x) = \theta(x-x_0)f(x)$$

dove $f(x)$ una soluzione particolare dell'equazione omogenea. Nel nostro caso naturale cercare la soluzione particolare nella forma:

$$y_p(x) = f_1^o(x)\theta(x+1) + f_2^o(x)\theta(x-1)$$

con $f_1^o(x)$ e $f_2^o(x)$ due soluzioni particolari dell'omogenea da determinare. Infatti grazie alla linearit dell'operatore A, avremo:

$$Ay_p(x) = A\left(f_1^o(x)\theta(x+1)\right) + A\left(f_2^o(x)\theta(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(x+1)+\delta(x-1)\right)$$

e possiamo risolvere separatamente le due equazioni

$$\begin{aligned} A\left(f_1^o(x)\theta(x+1)\right) &= \frac{1}{2}\delta(x+1) \\ A\left(f_2^o(x)\theta(x-1)\right) &= \frac{1}{2}\delta(x-1) \end{aligned}$$

$f_1^o(x)$ e $f_2^o(x)$ saranno allora determinate dalle condizioni (eq. [4.284]):

$$\begin{aligned} f_1^o(-1) = 0 \qquad & \left.\frac{d}{dx}f_1^o(x)\right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \\ f_2^o(1) = 0 \qquad & \left.\frac{d}{dx}f_2^o(x)\right|_{x=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dalla condizione $f_1^o(-1) = 0$ segue:

$$c_1 e^{\frac{3\pi i}{4}} + c_2 e^{\frac{\pi i}{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1 e^{\frac{\pi i}{2}} = -i\, c_1$$

mentre la condizione sulla derivata prima ci d:

$$c_1\left(\frac{3}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$$

Quindi

$$f_1^o(x) = e^{\frac{\pi i}{4}}x^{\frac{3}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}}x^{\frac{1}{4}}$$

Le condizioni per $f_2^o(x)$ danno luogo al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f_2^o(x) = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}}$$

Esercizio 43 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale:*

$$-f''(x) + g\delta(x-a)f(x) = k^2 f(x)$$

caratterizzata dal comportamento asintotico:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \sin(kx) = 0.$$

Esercizio 44 *Dimostrare che la distribuzione:*

$$D(x) = a\theta(x) + b\ln|x|$$

con a e b costanti arbitrarie, soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dx}\left(xD'(x)\right) = 0.$$

Esercizio 45 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:*

$$y'' + \omega^2 y = \delta(x^2 - a^2),$$

con le condizioni iniziali: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Esercizio 46 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$g''(x) - \frac{3}{4(1+x^2)}g(x) = \delta'(x).$$

Suggerimento:

1. *cercare la soluzione dell'equazione omogenea associata nella forma: $g_0(x) = x^\beta$;*

2. *cercare la soluzione generale della non omogenea nella forma: $g(x) = g_0(x)+\theta(x)g_1(x)$ dove con $g_0(x)$ si intende ora la soluzione generale dell'omogenea associata e con $g_1(x)$ una soluzione particolare (da determinare) ancora dell'equazione omogenea.*

Esercizio 47 *Dimostrare che $y = a\theta(x) + \delta(x)$ la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$xy' = -\delta(x).$$

Esercizio 48 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = \delta(1 - x^2),$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esercizio 49 *Calcolare il valore del parametro* g *per il quale l'oscillatore, che soddisfa l'equazione*

$$\ddot{x}(t) + x(t) = g\delta(t),$$

a riposo: $x(t) = 0$, *per* $t > 0$, *sapendo che* $x(t) = 3\sin t$ *per* $t < 0$.

Esercizio 50 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$xf''(x) + f'(x) = \delta(x^2 - a^2), \qquad |a| \neq 1$$

con le condizioni iniziali: $f(1) = 0,\ f'(1) = 1$.

Esercizio 51 *Calcolare, per* $t > 1$, *la soluzione* $x(t)$ *dell'equazione differenziale:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\delta(t^2 - 1)$$

che soddisfi le condizioni iniziali $x(-2) = \dot{x}(-2) = 0$.

Esercizio 52 *Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$-\frac{d^2V}{dx^2} = a\delta(x).$$

Mettere in relazione il risultato con quanto si conosce dall'elettrostatica a proposito del campo elettrico generato da una superficie piana conduttrice infinita (facoltativo).

Esercizio 53 *Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale:*

$$xy''(x) + y'(x) = \delta(x - 1)$$

Esercizio 54 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$y''(t) + \frac{2t}{(1+t^2)} y'(t) = 3\delta(t).$$

Esercizio 55 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - a^2 f(x) = \delta(x-b)$$

con le condizioni al contorno $f(0) = f(L) = 0$, *dove* $0 < b < L$.

Esercizio 56 *Trovare la soluzione dell'equazione differenziale*

$$\partial_{xx} G - \frac{2}{x} \partial_x G + \frac{2}{x^2} G = \delta(x-y)$$

regolare per $x \in [1,2]$, *che soddisfa le condizioni al contorno:*

$$G(1,y) \quad = \quad G(2,y) \quad = \quad 0.$$

Suggerimento: si cerchino le soluzioni dell'equazione omogenea sotto forma di potenza (x^α).

Esercizio 57 *Dimostrare che la distribuzione*

$$D(x) = a\theta(x) + b \ln |x|$$

è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x D'(x)) = 0.$$

Esercizio 58 *Risolvere l'equazione differenziale:*

$$(1+x^2) y'(x) + 2xy(x) = \delta(1-x^2)$$

con la condizione iniziale $y(0) \quad = \quad 1$.

3 Operatori lineari

Esercizio 59 *Si consideri in l^2 l'operatore:*

$$A : \underline{x} \to \underline{y}; \quad y_n = \alpha^n x_n + \frac{1}{n} x_{n+1}, \qquad |\alpha| < 1.$$

1. *Si dimostri che $\lambda_k = \alpha^k,\ k = 1, 2, \ldots$ sono autovalori di A e che i corrispondenti autovettori si scrivono nella forma: $\underline{x}^{(\lambda_k)} = \sum_{j=1}^{k} c_{kj} \underline{e}^{(j)}$ (non necessario calcolare esplicitamente i coefficienti c_{kj}) e quindi costituiscono una base in l^2 (perch?).*

2. *Si provi che $\lambda = 0$ appartiene allo spettro di A.*

Esercizio 60 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore:*

$$A = i \frac{d}{dx} + x$$

definito sulla variet lineare $V(A)$ delle funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$, insieme alle loro derivate prime, e tali che $f(-\pi) = f(\pi)$.

Esercizio 61 *Determinare il risolvente $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ dell'operatore A definito nell'esercizio 1, nei due modi seguenti:*

1. *mediante la decomposizione spettrale;*

2. *risolvendo in $V(A)$ l'equazione differenziale:*

$$(A - \lambda)\mathcal{G}(x; y) = \delta(x - y).$$

(Facoltativo) Utilizzare il risultato per calcolare la serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \lambda^2}.$$

Esercizio 62 *Risolvere il problema agli autovalori:*

$$i f'(x) = \lambda f(x),$$

con la condizione al contorno $f(-\pi) = f(\pi)$.

Esercizio 63 *Si consideri l'operatore differenziale:*

$$A = i\frac{d}{dx} + e^x,$$

definito sulle funzioni $f \in \mathcal{L}^2_{[0,1]}$ *tali che* $f(0) = f(1)$. *Trovare una base ortonormale in cui A diagonale.*

Esercizio 64 *Sullo spazio delle successioni di numeri reali, dotate della norma:* $||x|| = \max_k |x_k|$, *si consideri l'operatore:*

$$A : x_k \to y_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha^{k-l} x_l.$$

Per quali valori di α *A una contrazione?*

Esercizio 65 *Sia* P *un proiettore hermitiano unidimensionale:*

$$P = P^\dagger, \qquad P^2 = P, \qquad \mathrm{Tr}P = 1.$$

Determinare in qulae regione del piano complesso λ *converge la successione di matrici:*

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} (\lambda P)^n,$$

e stabilirne il limite, secondo la norma $||A||^2 = \mathrm{Tr}(A^\dagger A)$.

Esercizio 66 *Si calcolino autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$D = \frac{d}{dx}$$

nello spazio delle funzioni assolutamente continue tali che $f(-\pi) = f(\pi)$. *Si dimostri poi che* $\mathrm{Tr}(\exp(tD)) = 2\pi\delta(t)$.

Esercizio 67 *Si consideri su* l^2 *la successione di operatori*

$$A_n(e^{(k)}) = \frac{1}{n} e^{(k)} + e^{(k+1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1. *Dimostrare che* $||A_n|| \leq \sqrt{2}\ \forall n$.

2. Calcolare il limite (forte) della successione A_n.

Esercizio 68 *Si dimostri che l'operatore $D = d/dt$ non limitato in $\mathcal{L}^2_{[-\infty,+\infty]}$.*

Suggerimento: si consideri la successione di funzioni: $x^{(k)}(t) = \sin(kt)/kt$, si applichi D e...

Esercizio 69 *In $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$ si consideri la variet lineare V delle funzioni tali che $f(-1) = f(1)$. Su tale variet si prenda l'operatore $D = d/dx$.*

1. *Si determini* $\mathrm{Ker}(D + \mathbb{I})$.
2. *Dato $U = (\mathbb{I} - D)(\mathbb{I} + D)^{-1}$ si mostri che unitario e se ne calcolino gli autovalori.*

Esercizio 70 *Nello spazio lineare $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ delle funzioni complesse continue definite nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, sia*

$$(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t - s)x(s)ds.$$

Determinare autovalori e autofunzioni di A. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione:

$$Ax - \lambda x = y$$

ha soluzione $\forall y \in \mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ e calcolarla.

Esercizio 71 *Si consideri l'operatore*

$$D^2 \frac{d^2}{dt^2}$$

sulla variet lineare (densa in $\mathcal{L}^2_{[0,L]}$) costituita dalle funzioni la cui derivata seconda appartiene a $\mathcal{L}^2_{[0,L]}$, che soddisfano le condizioni al contorno: $x(0) = x(L) = 0$.

1. *Se ne calcolino gli autovalori.*
2. *Si dimostri che il suo inverso dato dall'operatore integrale:*

$$(Kx)(t) = \int_0^L ds\, K(t, s)x(s); \qquad K(t, s) = \begin{cases} 1/Lt(L - s); & 0 \le s \le t \\ 1/Ls(L - t); & t \le s \le L \end{cases}$$

3. *Utilizzando il fatto che:*

$$\mathrm{Tr}(K) = \int_0^L dt K(t,t)$$

determinare la somma della serie numerica $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 72 *Dato l'operatore di shift in* l^2*:*

$$E^+ : (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$

1. *mostrare che l'insieme* $|\lambda| < 1$ *appartiene allo spettro discreto di* E^+*;*
2. *mostrare che l'insieme* $|\lambda| > 1$ *regolare per* E^+*;*
3. *cosa succede per* $|\lambda| = 1$*?*

Esercizio 73 *Data la successione di operatori lineari definiti su* $l^2(\mathbb{R})$*:*

$$A_N : x_n \to y_n = \begin{cases} (1/n)x_n + \alpha^n x_{n+1}; & 0 < \alpha < 1 \qquad n = 1, \ldots, N-1 \\ (1/N)x_N & \qquad\qquad\qquad n = N \\ 0 & \qquad\qquad\qquad n > N \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. *formano una successione di Cauchy;*
2. *convergono (in norma) all'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \frac{1}{n} x_n + \alpha^n x_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

3. *vale la disuguaglianza* $||A|| \leq 1 + \alpha$.

Esercizio 74 *Dato in* l^2 *l'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-(k+n)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1. *si dimostri che* $\mathrm{Ker}\, A = 0$*;*
2. *si determini* $A^\dagger$*;*
3. *si dimostri che* A *limitato.*

Esercizio 75 *Calcolare gli elementi di matrice A_{mn} della matrice infinita che rappresenta l'operatore differenziale*

$$A = \cos x \frac{d}{dx} + \sin x$$

nella base di Fourier di $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$:

$$\left\{ f^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty} .$$

Esercizio 76 *Calcolare il risolvente $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ dell'operatore*

$$A = x \frac{d}{dx}$$

definito sulla variet lineare, densa in $\mathcal{L}^{\in}$ delle funzioni di classe C^1 nell'intervallo $[1, e]$, e tali che: $f(1) = f(e)$.

Determinarne poli e residui (nella variabile complessa λ).

Esercizio 77 *Siano dati gli operatori*

$$A = a(x) \frac{d}{dx}, \qquad B = b(x) \frac{d}{dx}, \qquad C = e^{-x}.$$

Determinare $a(x)$ e $b(x)$ in modo tale che valga:

$$[\{A, C\}, B] = 2$$

con $a(1) = 1$, $b(0) = 0$.

Esercizio 78 *Si consideri, in l^2, la successione di operatori:*

$$A^{(N)} : x_n \rightarrow y_n = \begin{cases} x_2 + x_N & n = 1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} & n = 2, \ldots, N-1 \\ x_{N-1} + x_1 & n = N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

1. *verificare che sono autoaggiunti e limitati;*

2. *verificare che lo spettro di $A^{(N)}$ l'insieme:*

$$\sigma_N = \{0\} \cup \{\lambda_k\}_{k=1}^{N}; \qquad \lambda_k = \frac{2\cos(2\pi k)}{N};$$

3. definendo l'operatore:

$$A : x_n \to y_n = \begin{cases} x_2 & n = 1 \\ x_{n-1} + x_{n+1} & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

mostrare che, anche se

$$\lim_{N \to \infty} ||A^{(N)} - A|| \neq 0$$

(non c'e' convergenza forte), risulta per:

$$\lim_{N \to \infty} \left(e^{(k)}, A^{(N)} x \right) = \left(e^{(k)}, Ax \right) \qquad \forall x \in l^2, \; k \in \mathbb{N}$$

(ossia, c'e' convergenza debole).

Esercizio 79 *Si consideri, sulla variet lineare delle funzioni in $\mathcal{L}^2_{[-\pi,\pi]}$ tali che $f(\pi) = f(-\pi)$ e prolungate per periodicit su tutta la retta reale, l'operatore di traslazione:*

$$(Tf)(x) = f(x+1).$$

1. *Si dimostri che T unitario.*
2. *Se ne trovino autovalori e autofunzioni.*

Esercizio 80 *In un generico spazio normato completo si consideri la successione di operatori:*

$$A_k = \mathbb{I} + \alpha^k B, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

dove B un operatore limitato.

1. *Per quali valori di α la successione $\{A_n\}$ convergente.*
2. *Qual il limite della successione?*

Esercizio 81 *Nello spazio l^2 si consideri l'operatore E tale che:*

$$(E\underline{x})_n = x_{n-1}, \qquad n > 1; \qquad (E\underline{x})_1 = 0$$

e si mostri che la successione di operatori $\{E^k\}$ tende debolmente a zero.

Esercizio 82 *Per quali valori del parametro reale positivo a l'operatore*

$$A : x \to ax(1-x) \qquad x \in [0,1]$$

una contrazione?

Qual per questi valori di a, l'unico punto fisso di A (se $x \in [0,1]$*)?*

Esercizio 83 *Si consideri in* l^2 *l'operatore:*

$$A : x_n \to y_n = \alpha_n x_n + x_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dimostrare che:

1. *A limitato;*
2. *gli* α_n *sono autovalori di A.*

Si determini inoltre A^+.

Esercizio 84 *Calcolare autovalori e autofunzioni degli operatori in* $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$*:*

$$A_\pm = \pm \frac{d}{dx} + x$$

sulla variet lineare delle funzioni C^∞ *che soddisfano condizioni periodiche* $(f(-1) = f(1))$.

Esercizio 85 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$A := x \frac{d}{dx},$$

definito sulle funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$ *che soddisfano* $f(a) = f(b)$ *(*$0 < a < b$*).*

Esercizio 86 *Dato l'operatore su* l^2

$$A : x_n \to y_n = \begin{cases} x_{n+1} & n = 1 \\ x_{n+1} - x_{n-1} & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

1. *Trovare* $A^\dagger$.
2. *Dimostrare che* $||A|| \leq 2$.

3. *Dimostrare che lo spettro di A un sottoinsieme chiuso e limitato dell'asse immaginario.*

Esercizio 87 *Sia T_N l'operatore ciclico sullo spazio euclideo N-dimensionale, e T_N^{-1} il suo inverso:*

$$T_N x_j = x_{j+1}(j = 1, \ldots, N-1); \quad T_N x_N = x_1$$
$$T_N^{-1} x_j = x_{j-1}(j = 2, \ldots, N); \quad T_N x_1 = 0$$

Mostrare che T_N (risp.T_N^{-1}) tende debolmente a D (risp. C) dove:

$$D x_j = x_{j+1}(j = 1, 2, \ldots)$$
$$C x_j = x_{j-1}(j = 2, 3, \ldots); \quad C x_1 = 0$$

Si ricordi che
$A_N \to A$ **debolmente** *se* $\lim_{N\to\infty}(y, (A - A_N)x) = 0, \forall x, y \in \mathcal{H}$

Esercizio 88 *Trovare autovalori e autovettori dell'operatore $L_t = i\frac{d}{dt} + t^2$, definito sulla varietà lineare delle funzioni che soddisfano la condizione al contorno: $f(1) = f(-1)$.*

Esercizio 89 *Dato in l_2 l'operatore "triangolare":*

$$y_n = (Ax)_n = \alpha^n x_n + \sum_{k=1}^{r} a_{nk} x_{n+k} \qquad |\alpha| < 1$$

dimostrare che $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$ sono autovalori di A e che 0 è un punto dello spettro.

Esercizio 90 *Nello spazio delle successioni doppiamente infinite di modulo quadro sommabile, munite della norma:*

$$||x|| = (\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|^2)^{1/2} \tag{1}$$

si consideri l'operatore:

$$K : x_n \to y_n = \sum_{m=-\infty}^{n} k^{|n-m|} x_m \quad ; \quad o < k < 1 \tag{2}$$

a) Dimostrare che K è limitato, con $||K|| \leq \frac{1+k}{1-k}$.
b) Introducendo la "z-trasformata di una successione (e la corrispondente anti-trasformata) mediante le formule:

$$\hat{x}(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} z^{-n} x_n$$

$$x_n = (2\pi i)^{-1} \oint_{|z|=1} dz z^{n-1} \hat{x}(z)$$

dimostrare la formula:

$$\hat{y}(z) = \hat{K}(z)\hat{x}(z)$$

con

$$\hat{K}(z) = \frac{k - k^{-1}}{(z-k)(z-k^{-1})}$$

Esercizio 91 *Gli operatori b e $b^\dagger$ sono definiti mediante la loro azione su una base ortonormale in l_2:*

$$b|e_n >= (n-1)^{1/2}|e_{n-1}> \quad (3)$$

$$b^\dagger|e_n >= n^{1/2}|e_{n+1}>; n = 1, 2, ... \quad (4)$$

Dimostrare che;
a) che $b^\dagger$ e' effettivamente l'hermitiano coniugato di b;
b) che lo spettro (discreto!) di b e' l'intero piano complesso λ;
c) che $b^\dagger$ non ha autovalori.

Esercizio 92 *Si determinino autovalori e autofunzioni dell'operatore $x\frac{d}{dx}$ sulla varieta' lineare delle funzioni (sufficientemente regolari) che soddisfano la condizione al contorno $f(-1) = f(1)$.*

Esercizio 93 *Si determinino autovalori e autofunzioni dell'operatore $x^2\frac{d^2}{dx^2} + 3x\frac{d}{dx}$ sulla varieta' lineare delle funzioni (sufficientemente regolari) che soddisfano le condizioni al contorno $f(-1) = f(1) = 0$ (suggerimento: cercare le soluzioni dell'equazione agli autovalori nella forma x^α, con α da determinare).*

Esercizio 94 *Sulla varieta' lineare, densa in $L_{2[-\pi,\pi]}$ delle funzioni tali che $f(\pi) = f(-\pi)$ (prolungate per periodicita' su tutta la retta reale), si consideri l'operatore di traslazione T, definito dalla relazione:*

$$(Tf)(x) = f(x+1)$$

- *si dimostri che T e' unitario;*
- *Se ne calcolino autovalori e autofunzioni (suggerimento: cercare le soluzioni di $f(x+1) \quad = \quad \lambda f(x)$ in forma esponenziale.*

Esercizio 95 *In un generico spazio normato completo si consideri la successione di operatori:*

$$A_n \;=\; I \;+\; \alpha^n B$$

dove B e' un operatore limitato e α e' un numero complesso. Per quali valori di α la successione converge? Qual e' il limite della successione?

Esercizio 96 *Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore*

$$A \;=\; id/dx + x$$

sulla varieta' lineare D_A, densa in $L_{2[-\pi,\pi]}$ delle funzioni $f(x)$ tali che $f(-\pi) = f(\pi)$. Determinare il risolvente $(A - \lambda I)^{-1}$ in uno dei due modi seguenti:

- *utilizzando la decomposizione spettrale;*
- *risolvendo in D_A l'equazione differenziale*

$$(A - \lambda I)G(x,\xi) = \delta(x - \xi)$$

Esercizio 97 *Dato in l^2 l'operatore*

$$A : \underline{x} \to \underline{y} \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha x_2 \\ y_n = \alpha^n x_{n+1} + \alpha^{n-1} x_{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

1. *Dimostrare che A hermitiano per $\alpha \in \mathbb{R}$.*
2. *Dimostrare che per $|\alpha| > 1$ A non limitato.*
3. *Dimostrare che $\operatorname{Ker} A \neq 0$ per $|\alpha| > 1$.*

Esercizio 98 *Sia A un operatore (limitato) su $\mathcal{H}$ e $A^\dagger$ il suo aggiunto.*

1. *Dimostrare che $AA^\dagger$ e $A^\dagger A$ sono autoaggiunti e definiti positivi.*
2. *Dimostrare che, se $\operatorname{Ker} A = 0$, $AA^\dagger$ e $A^\dagger A$ hanno gli stessi autovalori, e determinare l'operatore che trasforma i corrispondenti autovettori.*

Esercizio 99 *Nello spazio l^2 delle successioni di modulo quadrato sommabile($\vec{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$) agisce l'operatore diagonale A secondo la legge:*

$$A := x_n \to y_n = \lambda^n x_n$$

Per quali valori del numero complesso λ A è una contrazione?
N.B.: si ricordi che la distanza in l^2 è definita come:

$$d^2(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|^2$$

Esercizio 100 *L'operatore di abbassamento E^- agisce sulle successioni l_2 secondola legge*

$$E^- x_1 = 0; \quad E^- x_n = x_{n-1}$$

Applichiamolo n volte: quanto vale $\lim_{N\to\infty}((E^-)^N$*?*

4 Serie e trasformata di Fourier

Esercizio 101 *Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione:*

$$P\left(\frac{1}{x^2-1}\right).$$

Esercizio 102 *La trasformata di Hilbert di una funzione definita nel modo seguente:*

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}.$$

Dimostrare la propriet $H^2 = -\mathbb{I}$ (cio: $(H^2 f)(x) = (H(Hf))(x) = -f(x)$).

Suggerimento: si passi alla trasformata di Fourier, sfruttando l'unicit della trasformata e ricordando che $\mathcal{F}(P) = i\pi \mathrm{sgn}\, k$.

Esercizio 103 *Calcolare, nel senso delle distribuzioni, la somma della serie:*

$$S(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n e^{in\theta}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi],$$

sullo spazio delle funzioni sviluppabili in serie di Fourier insieme alle loro derivate prime e tali che $f(\pi) = f(-\pi)$.

Esercizio 104 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$ *la funzione*

$$f(x) = \theta(1 - x^2);$$

utilizzare lo sviluppo ottenuto per calcolare la somma della serie:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

(Si posto per comodit $\sin 0/0 = 1$*).*

Esercizio 105 *Si consideri la funzione* $f(x) = e^{-|x|}$*. Tenendo presente che le sue derivate prime e seconde (nel senso delle distribuzioni) valgono rispettivamente:*

$$f'(x) = -\mathrm{sgn}x\, e^{-|x|}$$
$$f''(x) = e^{-|x|} - 2\delta(x)$$

Si calcolino, in entrambi i modi possibili, le trasformate di Fourier di $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *e si confrontino i risultati.*

Esercizio 106 *Usando la trasformata di Fourier, si determini una soluzione particolare dell'equazione differenziale:*

$$f''(x) - a^2 f(x) = \delta'(x - b)$$

Esercizio 107 *Determinare il limite (nel senso delle distribuzioni) della successione:*

$$f_n(x) = n^2 \mathrm{sgn}\, x e^{-n|x|}$$

1. *direttamente;*
2. *studiando il limite della successione delle trasformate di Fourier:*

$$\hat{f}_n(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f_n(x).$$

Esercizio 108 *Determinare la trasformata di Fourier della distribuzione:*

$$\frac{1}{\pi} P\left(\frac{1}{x^2 - \epsilon^2}\right).$$

Esercizio 109 *Passando alla trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integro–differenziale:*

$$f'(x) = x + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-|x-y|} f(y).$$

Alternativamente, si cerchi la soluzione usando l'"Ansatz":

$$f(x) = A + BX.$$

Esercizio 110 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[-1, 1]$*, la funzione:*

$$f(x) = |x|,$$

e utilizzare il risultato per verificare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esercizio 111 *Scrivere lo sviluppo di Fourier di* xe^x *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$*. Confrontare il risultato con gli sviluppi di* x *ed* e^x *nello stesso intervallo e stabilire la relazione che li connette.*

Esercizio 112 *Sviluppare in serie di Fourier nella regione* $[-\pi, \pi]$ *la funzione:*

$$f(x) = \sinh\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Scrivere la relazione di Parceval.

Esercizio 113 *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *due funzioni sviluppabili in serie di Fourier in* $[-\pi, \pi]$ *i cui sviluppi siano dati da:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \sin(nx);$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Calcolare il prodotto scalare:

$$(f, g') = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f^*(x) \frac{dg}{dx}(x).$$

Esercizio 114 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[0,1]$*, la funzione:*

$$f(x) = x(1-x).$$

Utilizzare il risultato per calcolare la somma della serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Esercizio 115 *Risolvere l'equazione integrale (si ricordino le propriet del prodotto di convoluzione)*

$$\frac{1}{x^2+1} = P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}.$$

Esercizio 116 *Usando le propriet della trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione, risolvere l'equazione integrale:*

$$x f(x) = \alpha P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}; \qquad \alpha > 0.$$

Esercizio 117 *Dimostrare la formula (prodotto di convoluzione):*

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \delta(x-y)\delta(y).$$

Esercizio 118 *Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione* $f(x) = 1$, $x \in [0, \pi]$.

A cosa converge la serie di Fourier in $x = 0$*? e in* $x = \pm\pi$*?*

Esercizio 119 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione* $f(x) = |x|$ $(x \in [-\pi, \pi])$.

Commentare, confrontando con l'esercizio precedente, la serie che si ottiene derivando termine a termine.

Esercizio 120 *Si supponga $f(z)$ analitica nel cerchio di raggio 1 (frontiera inclusa) ad eccezione al pi del punto $z = 0$. Se ne scriva lo sviluppo di Laurent nell'intorno dell'origine. Lo si calcoli in un generico punto del cerchio di raggio 1. Si confronti il risultato con lo sviluppo in serie di Fourier usando la rappresentazione polare dei numeri complessi.*

Esercizio 121 *Utilizzando un'importante propriet della trasformata di Fourier, calcolare:*

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x),$$

dove

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \frac{1}{y^2 + a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \theta(x - y) \frac{1}{y^2 + a^2}$$

Esercizio 122 *Si determini lo sviluppo in serie di Fourier della funzione* $\cosh(zx)$ *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$. *Si utilizzi il risultato per ottenere una serie convergente alla funzione*

$$F(z) = \frac{\pi z}{\sinh(\pi z)}$$

Si confronti lo sviluppo ottenuto con lo sviluppo di Mittag–Leffler della funzione $F(z)$ (facoltativo).

Esercizio 123 *Si determini la trasformata di Fourier di $f(x) = |x|$.*

Suggerimento: si osservi che:

$$\int_0^{\infty} dx\, x e^{ikx} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{\infty} dx\, x e^{i(k+i\epsilon)x}.$$

Esercizio 124 *Si dimostri che, se $f(x)$ una funzione sviluppabile in serie di Taylor su tutta la retta, vale l'identit:*

$$\mathcal{F}\left(\exp(a\frac{d}{dx})f(x)\right) = e^{-ika}\hat{f}(k) = \mathcal{F}\left(f(x+a)\right).$$

Avendo denotato con $\mathcal{F}$ la trasformata di Fourier.

Esercizio 125 *Si determini la trasformata di Fourier della distribuzione*

$$P(\coth x).$$

Esercizio 126 *Determinare la trasformata di Fourier della funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le -1/2 \\ 1 & |x| < 1/2 \\ -x+1 & 1/2 \le x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Esercizio 127 *Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier, risolvere l'equazione differenziale*

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \psi(x,0) = x(\pi - x) \\ \psi(0,t) = \psi(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 128 *Dallo sviluppo in serie di Fourier di* $f(x) = |x|$ *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$*, ricavare la formula:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(x - k\pi).$$

Esercizio 129 *Usando le propriet della trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = g(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \frac{e^{i(x-y)}}{(x-y)^2 + 1}$$

sapendo che $\hat{g}(k) = \delta'(k)$.

Esercizio 130 *Trovare la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$$

Esercizio 131 *Sviluppare in serie di Fourier, nell'intervallo* $[0,1]$*, la funzione:*

$$f(x) = x(1-x^2).$$

Utilizzare il risultato per calcolare il valore della funzione $\zeta(z)$ *di Riemann nel punto* $z=2$*, la funzione* $\zeta(z)$ *essendo definita come:*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Esercizio 132 *Sviluppare in serie di Fourier la funzione:*

$$f(x) = \cosh x \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Utilizzare il risultato per calcolare la serie numerica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}.$$

Esercizio 133 *Calcolare la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione*

$$(D * D)(x), \qquad D(x) = \theta(x) e^{-ax}, \qquad a > 0.$$

($\theta(x)$ *funzione a gradino).*

Esercizio 134 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo* $[-1,1]$ *la funzione*

$$f(x) = x^2.$$

Si verifica il fenomeno di Gibbs? In quali punti?

Esercizio 135 *Sviluppare in serie di Fourier nell'intervallo* $[-1,1]$ *la funzione:*

$$f(x) = e^{|x|}.$$

Esercizio 136 *Mediante la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione alle derivate parziali:*

$$i\frac{\partial G}{\partial t} + b\frac{\partial G}{\partial x} = \delta(x)\delta(t), \qquad b > 0.$$

Esercizio 137 *La serie di Fourier di una funzione di modulo integrabile in $[-\pi, \pi]$ è data dall'espressione:*

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(int)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \exp(-int) f(t)$$

Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \mathrm{sgn}(t)$$

e di conseguenza la serie di Fourier della $\delta(t)$.

Esercizio 138 *Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{array}{cc} 0 \ , & -\pi < x < 0 \\ \sin x \ , & 0 < x < \pi \end{array} .$$

Esercizio 139 *Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \sin x / x$.*

Esercizio 140 *Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \tanh x$.*

Esercizio 141 *Usando la trasformata di Fourier risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) \ = \ c + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{(x-y)^2 + \gamma^2} f(y).$$

Esercizio 142 *Sviluppare in serie di Fourier in $[-1, 1]$ la funzione $f(x) = |cos(\pi x)|$.*

Esercizio 143 *Data la funzione $f(x) = x^2 + 2x$ si determini, in $(0, \pi)$, il suo sviluppo in serie di Fourier termini di*

1. *soli seni;*

2. *soli coseni;*

3. *seni e coseni.*

Esercizio 144 *La temperatura, $T(x,t)$, di una sbarra metallica lunga L, è regolata dall'equazione di diffusione*

$$\partial_t T = \mathrm{D}\partial_{xx} T.$$

Gli estremi della sbarra sono tenuti a temperatura nulla. All'istante $t = 0$, la temperatura, $T(x,0)$, è data da, con $0 < a < L$,

$$T(x,0) = \begin{array}{cc} 0 & 0 < x < (L-a)/2 \\ L/a & (L-a)/2 < x < (L+a)/2 \\ 0 & (L+a)/2 < x < L. \end{array}$$

Si chiede di determinare $T(x,t)$.

Esercizio 145 *Calcolare la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{\sin\left[a(x-y)\right]}{x-y} \frac{1}{y^2+b^2},$$

dove a e b sono reali e positivi.

Esercizio 146 *Si determini lo sviluppo in serie di Fourier complessa della funzione $f(x) = \exp(\mathrm{i}\beta x)$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, dove β è reale positiva. Utilizzando l'identità di Parseval dimostrare la formula*

$$\frac{1}{\sin(x)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x-\pi n)^2} + \frac{1}{(x+\pi n)^2}\right)$$

Esercizio 147 *Calcolare la serie di Fourier della funzione:*

$$f(x) = \exp(\alpha|x|); \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Utilizzare il risultato per determinare la serie di Fourier di $|x|$.

Esercizio 148 *Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione* x^2 *nell'intervallo* $[0, 2\pi]$.

- *Lo sviluppo e' uniformemente convergente in* $[0, 2\pi]$*?*
- *A che cosa converge la serie di Fourier agli estremi dell'intervallo?*
- *Utilizzare lo sviluppo per dimostrare che* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Esercizio 149 *La funzione* $f(x)$ *vale* x *in* $[0, 1]$. *Svilupparla in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo* $[-1, 1]$.

Esercizio 150 *La temperatura di una sbarra infinita e' inizialmente descritta dalla funzione oscillante* $u(x, 0) = u_0 \sin(x\lambda)$. *Si calcoli la distribuzione di temperatura ad un istante generico* t*, sapendo che l'evoluzione e' descritta dall'equazione:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esercizio 151 *Usando la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione integrale:*

$$F(x) = a + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ F(x - y \frac{\cos(\alpha(x-y)x)}{\cosh(x-y))}$$

Esercizio 152 *Risolvere mediante la trasformata di Fourier l'equazione integrale:*

$$F(x) = a + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \frac{F(y)}{\cosh(x-y)}$$

Esercizio 153 *La trasformata di Fourier* $f(k)$ *della gaussiana* $f(x) = \exp(-x^2)$ *vale* $(\pi)^{1/2} \exp(-\frac{k^2}{4})$ *(perché ?); utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier per Traslazioni e cambiamenti di scala calcolare la trasf. di Fourier di* $\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$

Esercizio 154 *Calcolare la trasformata di Fourier* $\hat{f}(k)$ *della lorentziana* $f(x) = \frac{a}{x^2+b^2}$*; utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier per cambiamenti di scala calcolare la trasf. di Fourier di* $\frac{1}{x^2+1}$.

Esercizio 155 *L' operatore di Hilbert H è definito dalla relazione:*

$$(Hf)(x) = (i\pi)^{-1} P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{x-y}$$

Usando la trasformata di Fourier, dimostrare che vale l'identità $H^2 = I$, cioè: $H(Hf) = f \quad \forall f$ (naturalmente, le funzioni f debbono appartenere a L^1 e soddisfare la condizione del Dini).

5 Funzione di Green

Esercizio 156 *Risolvere, col metodo della funzione di Green, l'equazione differenziale:*

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 f'(x)\right) = x, \qquad f(1) = f(2) = 0.$$

Esercizio 157 *Determinare la funzione di Green per l'operatore*

$$\frac{d^2}{dt^2} - 1$$

con le condizioni al contorno $x(a) = x(-a) = 0$.

Esercizio 158 *Dato l'operatore differenziale:*

$$L = i\frac{d}{dx} + \cos x$$

sulla variet lineare $V(L) = \{f : f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})\}$,

1. *determinarne la funzione di Green;*
2. *trovare $f \in V(L)$ tale che $(Lf)(x) = \theta(x)\cos x$.*

Esercizio 159

1. *Con il metodo della funzione di Green si risolva l'equazione di Poisson sulla retta (V potenziale elettrostatico, ρ densit di carica):*

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \rho(x).$$

Si imponga sulla funzione di Green la richiesta fisica che il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme dipenda solo dalla distanza (cio $G(x,0) = G(-x,0)$). Si osservi inoltre che $G(x,y) = G(x-y,0)$

2. *Si sviluppino i calcoli per* $\rho(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

Esercizio 160 *Si determini la funzione di Green dell'operatore:*

$$L = DpD; \qquad p = \frac{1}{x^2+1}; \qquad V(L) = \{f \in \mathcal{L}^2_{[-1,1]} : f(-1) = f(1) = 0\}$$

Esercizio 161 *Dato l'operatore differenziale:*

$$L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 3x\frac{d}{dx}$$

con le condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$,

1. *se ne determini la funzione di Green;*
2. *se ne calcolino autovalori e autofunzioni*

Esercizio 162 *Sia dato l'operatore* $L = -D^2$ *sulla variet lineare (densa su* $\mathcal{L}^2_{[-1,1]}$*) delle funzioni appartenenti a* $C^\infty_{[-1,1]}$ *tali che* $f(-1) = f(1) = 0$.

1. *Trovarne autovalori e autofunzioni.*
2. *Determinare la funzione di Green.*
3. *Indicando con* $\hat{G}$ *il corrispondente operatore, utilizzare la propriet:*

$$\mathrm{Tr}\hat{G} = \int_{-1}^{1} dt\, G(t,t)$$

per calcolare $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 163 *Sia* L *l'operatore differenziale del prim'ordine:*

$$L = \frac{d}{dx} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Calcolare la funzione di Green $G(x, y; \lambda)$ *dell'operatore* $L - \lambda$ *nello spazio delle funzioni* f *tali che* $f' \in \mathcal{L}^2_{[-a,a]}$ *e che soddisfano le condizioni al contorno* $f(-a) = f(a)$.

Dallo studio delle singolarit di G *nel piano complesso* λ *risalire agli autovalori e alle autofunzioni di* L *nello spazio in oggetto.*

Esercizio 164 *Trovare autovalori e autofunzioni di* $R(\lambda) = (L - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ *dove* L *l'operatore differenziale definito da:*

$$(Lf)(x) = if'(x) + xf(x)$$

e dal dominio

$$\mathcal{D}_L = \{f(x) \in \mathcal{L}^2_{[0,1]};\ f(0) = f(1)\}$$

Determinare esplicitamente $R(\lambda)$ *calcolando la funzione di Green di* $L - \lambda \mathbb{I}$.

Esercizio 165 *Dato l'operatore differenziale:*

$$L_x = x^2 D^2 - 3xD; \qquad D = \frac{d}{dx}$$

che agisce sulla varieta' lineare delle funzioni che obbediscono alle condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$,

- *se ne determini la funzione di Green;*
- *se ne calcolino autovalori e autofunzioni.*

Suggerimento: si cerchino le soluzioni $u(x)$ *dell'equazione omogenea* $L_x u(x) = 0$ *nella forma* $u(x) = x^\alpha$.

Esercizio 166 *Sia dato l'operatore lineare* $L_x = -D^2$ *sulla varieta' lineare delle funzioni* $f(x)$ *tali che* $f(-1) = f(1) = 0$.

- *trovarne autovalori e autofunzioni;*
- *determinarne la funzione di Green* $G(x, \xi)$*;*
- *indicando con* $\hat{G}$ *il corrispondente operatore integrale, utilizzare la proprieta'*

  $$Tr\hat{G} = \int_{-1}^{1} dx G(x, x)$$

  per calcolare $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Esercizio 167 *Determinare la funzione di Green dell'operatore* L_x *definito come:*

$$(L_x f)(x) = f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\beta^2}{x^2} f(x)$$

sulla varieta' lineare delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno $f(1) = f(2) = 0$.
Suggerimento: cercare le soluzioni dell'equazione omogenea nella forma $f(x) = x^\gamma$.

Esercizio 168 *I. Trovare gli autovalori* λ_n *e le autofunzioni* ϕ_n *dell'operatore* $\mathcal{L} := D^2 \ + \ D \ + \ 1$*, nello spazio delle funzioni che soddisfano le condizioni al contorno:* $f'(0) \ = \ f'(1) \ = \ 0$*:*

$$f''(x) \ + \ f'(x) + \ f(x) \ = \ \lambda f(x); \ \ f'(0) \ = \ f'(1) \ = \ 0.$$

II. Calcolare per l'operatore suddetto la funzione di Green che soddisfa le medesime condizioni al contorno

III. Dimostrare che vale la formula

$$G(x,\xi) \ = \ \sum_n \phi_n(x)\bar{\phi}_n(\xi)(\lambda_n)^{-1}$$

6 Equazioni integrali

Esercizio 169 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = \sin(2t) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} ds \, \sin(t-s)x(s),$$

ricordando che:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} ds \, \sin(ns)\cos(ms) = 0, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} ds \, \sin(ns)\sin(ms) = \pi\delta_{nm}, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} ds \, \cos(ns)\cos(ms) = \pi\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Esercizio 170 *Risolvere con il metodo delle approssimazioni successive l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^1 ds \, (t-s)x(s).$$

(Si consiglia di porre $\lambda = -\mu^2$*).*

Esercizio 171 *Si consideri, nello spazio* $C_{[0,1]}$*,* $||x|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$*, l'operatore integrale non lineare:*

$$(Kx)(t) = \lambda \int_0^t ds \, \sin[x(s)].$$

Si verifichi che K *una contrazione se* $|\lambda| < 1$*. In tal caso, qual l'unica soluzione di* $x = Kx$*?*

Esercizio 172 *Determinare gli autovalori dell'equazione*

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} F(ts)x(s)ds,$$

sapendo che $F(u) = k_1$ *per* $u > 0$, $F(u) = k_2$ *per* $u < 0$.

Esercizio 173 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = \theta(x^2 - a^2) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-|x-y|} f_(y).$$

Esercizio 174 *Determinare autovalori e autofunzioni dell'equazione di Fredholm:*

$$x(t) = \lambda \int_{0}^{1} \left[\cos(2\pi t) - \cos(2\pi s)\right] x(s)ds.$$

Esercizio 175 *Trasformare in equazione di Volterra l'equazione differenziale*

$$\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) + t^2 x(t) = 0$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$.

Esercizio 176 *Determinare autovalori e autosoluzioni normalizzate dell'equazione di Fredholm*

$$x(t) = \lambda \int_{0}^{2\pi} K(t,s)x(s)ds,$$

dove

$$K(t,s) = \theta(t-\pi)\theta(\pi-s) + \theta(\pi-t)\theta(s-\pi),$$

e theta la funzione a gradino.

Esercizio 177 *Risolvere l'equazione integro–differenziale:*

$$f'(x) = x + \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)e^{-|x-y|}.$$

Esercizio 178 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$f(x) = 2\delta(x) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{|y-x|} f(y).$$

Esercizio 179 *Sia K l'operatore integrale che opera in $\mathcal{L}^2_{[0,1]}$ con nucleo*

$$K(x, y) = xy(x + y).$$

Calcolare $\mathrm{Tr}(K^3)$.

Esercizio 180 *Determinare autovalori e autosoluzioni dell'equazione di Fredholm*

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{sign}(t) + \mathrm{sign}(s)}{(1 + |t|)(1 + |s|)} x(s) ds.$$

Esercizio 181 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = y(t) - \mu \int_{-\infty}^{t} ds\, K(t - s)x(s)$$

dove

$$K(t) = \begin{cases} e^{-\mu t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (\mu > 0),$$
$$y(t) = \frac{e^{-\mu|t|}}{2\mu}$$

Esercizio 182 *Si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$ *in* $L^2_{[-\pi,\pi]}$*:*

$$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} dsK(t, s)x(s)$$
$$K(t, s) = \theta(t - s)(\pi + s)(\pi - t) + \theta(t + s)(\pi - s)(\pi + t)$$

(a) determinare gli elementi di matrice di $\mathbf{K}$ *nella base di Fourier*

$$e_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt(2\pi)},$$

cioè le quantità $K_{n,m} = (e_n, \mathbf{K}e_m)$.
(b) Calcolare $Tr\mathbf{K} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,n}$*, utilizzando la formula* $Tr\mathbf{K} = \int_{-\pi}^{\pi} dtK(t, t)$.

Esercizio 183 *Risolvere con il metodo della aprrossimazioni successive l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = t + \lambda \int_0^t ds(t-s)x(s)$$

Si consiglia di porre $\lambda = -\mu^2$. Potete suggerire ed eventualmente applicare un altro metodo di soluzione?

Esercizio 184 *Trovare l'***unica** *soluzione dell'equazione integrale:*

$$x(t) = a + bP \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{x(s)}{\sinh(t-s)}$$

Esercizio 185 *Trovare l'unica soluzione dell'equazione integrale:*

$$x(t) = a\theta(t) + b \int_{-\infty}^{t} x(s); \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 186 *Risolvere l'equazione integrale:*

$$x(t) = a\delta(t) + bP \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{x(s)}{t-s}.$$

Esercizio 187 *Risolvere l'equazione integrale di Fredholm:*

$$x(t) \;=\; sint + \lambda(\int_0^t \; t(1-s)x(s)ds + \int_t^1 \; s(1-t)x(s)\; ds)$$

Suggerimento: trasformare, derivando due volte, l'equazione integrale in una equazione differenziale; osservare che l'equazione integrale "ingloba" le condizioni al contorno $x(0) \;=\; ...; \; \dot{x}(0) \;=\; ....$

Esercizio 188 *Si consideri l'operatore integrale* $\mathbf{K}$ *introdotto nell'esercizio precedente, definito dalla formula:*

$$\mathbf{K}x(t) \;:=\; \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \;=\; \int_0^t \; t(1-s)x(s)ds + \int_t^1 \; s(1-t)x(s)\; ds$$

Trovare le soluzioni dell'equazione agli autovalori:

$$\mathbf{K}x(t) \;=\; \mu x(t); \quad x(0) \;=\; x(1) \;=0$$

Calcolare la serie numerica data dalla somma degli autovalori, vale a dire la traccia τ dell'operatore $\mathbf{K}$, sapendo che vale la formula:

$$\tau \;=\; \int_0^1 dt K(t,t)$$

Esercizio 189 *Risolvere l'equazione integrale (di Volterra)*

$$x(t) \;=\; \sin t + \int_0^t \cosh(t-s)\; x(s)\; ds$$

Suggerimento: ottenere per derivazioni successive una equazione differenziale del II ordine per $x(t)$, non omogenea; cercarne una soluzione particolare nella forma $x_p(t) \;=\; C\cos t + S\sin t$; osservare che l'equazione integrale assegnata "contiene già le condizioni iniziali" dell'equazione differenziale ad essa associata, in modo tale che la soluzione e' effettivamente unica (come deve essere).

Esercizio 190 *Risolvere l'equazione integrale di Fredholm:*

$$x(t) \;=\; sint + \lambda \int_0^1 \cosh\;(t-s)x(s)ds$$

Suggerimento: Osservare che il nucleo e' degenere, per cui il problema si riduce ad un problema algebrico (lineare).

Esercizio 191 *Data l'equazione integrale di Volterra*

$$x(t) = \sin t + \lambda \int_0^t ds \cos(t-s) x(s)$$

ridurla a una equazione differenziale (ordinaria e lineare) con condizioni iniziali assegnate.

Esercizio 192 *Risolvere l'equazione integrale di Volterra:*

$$x(t) = \exp(\alpha t) + \lambda \int_0^t ds \exp(t-s) x(s)$$

(a) riducendola ad una equazione differenziale (del I ordine !) con la condizione iniziale $x(0) = ...$
(b) con il metodo iterativo, partendo da $x^{(0)}(t) = \exp(\alpha t)$