Esercizi di algebra lineare

A cura di: Fabio Musso, Orlando Ragnisco.

1 Equazioni lineari algebriche

Esercizio 1.1 *Trovare una base di vettori che generino il nucleo e l'immagine della matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che:

$$\dim\ \mathrm{R}_A + \dim\ \mathrm{Ker}_A = 3$$

Verificare inoltre:

$$\mathrm{R}_A \oplus \mathrm{Ker}_{A^\dagger} = \mathbb{C}^3$$

Per definizione:

$$\mathrm{Ker}_A = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \text{ t.c. } A\vec{v} = \vec{0}\},$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} iv_2 = 0 \\ iv_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ iv_1 + v_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_3 = -iv_1 \end{cases}$$

Fissando il valore di v_1 otteniamo un vettore di base del nucleo di A:

$$\mathrm{Ker}_A = \mathrm{span}\{(1, 0, -i)\} \implies \dim\ \mathrm{Ker}_A = 1$$

L'immagine di A il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{R}_A = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^3 \text{ t.c. } \vec{v} = A\vec{v} = \vec{w},\ \vec{w} \in \mathbb{C}^3\},$$

Dobbiamo quindi determinare sotto quali condizioni su v_1, v_2, v_3 possibile risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} iw_2 = v_1 \\ iw_1 + w_2 + w_3 = v_2 \\ iw_1 + w_3 = v_3 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow iv_1 + v_2 - v_3 = 0 \tag{1}$$

Infatti, se quest'ultima condizione non verificata il sistema incompatibile. Abbiamo una condizione lineare su 3 incognite che definisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$ di dimensione 2. Per fissare una base dell'immagine di A dobbiamo quindi trovare due soluzioni linearmente indipendenti della condizione (1). Notiamo che (1) determina il valore di v_3 una volta fissati i valori di v_1 e v_2; due possibili scelte di v_1 e v_2 che danno luogo a soluzioni indipendenti sono: $v_1 = 0,\ v_2 = 1$ e $v_1 = 1,\ v_2 = 0$. Troviamo quindi:

$$\mathrm{R}_A = \mathrm{span}\{(0, 1, 1), (1, 0, i)\} \implies \dim\ \mathrm{R}_A = 2$$

Per terminare l'esercizio dobbiamo determinare il nucleo di $A^\dagger$:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -iv_2 - iv_3 = 0 \\ -iv_1 + v_2 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_2 = iv_1 \\ v_3 = -iv_1 \end{cases}$$

Nuovamente, fissando $v_1 = 1$, troviamo:

$$\mathrm{Ker}_A^\dagger = \mathrm{span}\{(1, i, -i)\}$$

Per dimostrare che $\mathrm{R}_A \oplus \mathrm{Ker}_A^\dagger = \mathbb{C}^3$, mostriamo che i vettori di base di R_A e $\mathrm{Ker}_A^\dagger$ sono linearmente indipendenti. Costruiamo quindi una matrice 3×3 utilizzando tali vettori come righe e mostriamo che il suo determinante diverso da zero:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & i \\ 1 & i & -i \end{pmatrix} = 3i \neq 0$$

Alternativamente si può far vedere che il vettore $(1, i, -i)$ è ortogonale all'immagine di A.

Esercizio 1.2 *Dimostrare che lo spazio della matrici $N \times N$ a elementi complessi diviene uno spazio euclideo se si definisce il prodotto scalare come $(A, B) = tr\left(A^\dagger B\right)$.*

L'insieme delle matrici $N \times N$ a elementi complessi possiede una struttura di spazio vettoriale sotto le ordinarie operazioni di somma di matrici e moltiplicazione di una matrice per uno scalare. Dobbiamo quindi verificare che la definizione $(A, B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right)$ soddisfa tutti gli assiomi del prodotto scalare. Notiamo che:

$$(A, B) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) = \sum_{i,j=1}^{N} \overline{A_{ji}} B_{ji} = \overline{\left(\sum_{i,j=1}^{N} \overline{B_{ji}} A_{ji}\right)} = \overline{\mathrm{tr}\left(B^\dagger A\right)} = \overline{(B, A)}$$

Quindi il primo assioma è verificato. Dalla linearità della traccia segue immediatamente $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$(A, \lambda B + \mu C) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger(\lambda B + \mu C)\right) = \lambda \mathrm{tr}\left(A^\dagger B\right) + \mu \mathrm{tr}\left(A^\dagger C\right) = \lambda(A, B) + \mu(A, C)$$

L'ultimo assioma da verificare è:

$$(A, A) \geq 0 \qquad (A, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$$

Nel nostro caso:

$$(A, A) = \mathrm{tr}\left(A^\dagger A\right) = \sum_{i,j=1}^{N} \overline{A_{ji}} A_{ji} = \sum_{i,j=1}^{N} |A_{ji}|^2 \geq 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} |A_{ji}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_{j,i} = 0 \ \ \forall i, j \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$$

Esercizio 1.3 *Sia M il sottoinsieme dello spazio complesso tridimensionale C^3 contenente i vettori della forma:*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2, v_3 \in C.$$

1. *Dimostrare che M non è un sottospazio vettoriale di C^3. (Suggerimento: come primo passo si noti che uno dei vettori della base canonica non appartiene ad M).*

2. *Trovare un sottoinsieme di M che sia un sottospazio vettoriale di C^3 di dimensione 2.*

Esercizio 1.4 *Calcolare tr $\mathbf{v}(z)\mathbf{v}^\dagger(z)$, dove $\mathbf{v}(z)$ è il vettore colonna di componenti $v_k = z^k (k = 1, \ldots, N)$.*

Esercizio 1.5 *Data la matrice $(N+1) \times (N+1)$:*

$$A = \begin{pmatrix} (a,b) & \vdots & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \vdots & & & & \\ b_2 & \vdots & & C_{ij} = b_i a_j & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ b_n & \vdots & & & & \end{pmatrix}, \qquad (a,b) = \sum_{i=1}^{N} a_i b_i,$$

determinare $\operatorname{Im} A$ *e* $\operatorname{Ker} A^t$.

Esercizio 1.6 *Ogni matrice $(N+1) \times (N+1)$ pu essere scritta (cfr. l'esercizio precedente) come somma di una matrice del tipo*

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & \vdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & \hat{X}_{N \times N} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

e una matrice del tipo:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & \vdots & & & & \\ z_2 & \vdots & & 0_{N\times N} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ z_N & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Dimostrare che:

1. *il commutatore di due matrici del tipo X o del tipo Y una matrice del tipo X;*
2. *il commutatore di una matrice del tipo X e di una matrice del tipo Y una matrice del tipo Y.*

Esercizio 1.7 *Dimostrare che, se A e B sono due matrici hermitiane 2×2 a traccia nulla, il loro prodotto, in termini delle matrici di Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, pu scriversi nella forma:*

$$AB = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbb{I} + i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \hat{\sigma},$$

essendo $\vec{a}, \vec{b}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Come devono essere i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ affinch le due matrici A, B commutino?

Le matrici di Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ formano una base delle matrici hermitiane 2×2 a traccia nulla sul campo dei reali, quindi possiamo scrivere A e B come loro combinazioni lineari a coefficienti reali:

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \qquad B = \sum_{i=1}^{3} b_i \sigma_i = \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, 3$$

Utilizzando la formula per il prodotto delle matrici di Pauli:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{j=1}^{3} a_j \sigma_j \sum_{k=1}^{3} b_k \sigma_k = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \sigma_j \sigma_k = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \delta_{jk} \mathbb{1} + i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \sigma_l = \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \mathbb{1} + i \sum_{j,k,l=1}^{3} \epsilon_{j,k,l} a_j b_k \sigma_l = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{1} + i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

In maniera analoga si ottiene:

$$BA = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \mathbb{1} + i(\vec{b} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{\sigma}$$

Quindi:

$$[A, B] = 2i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$$

e le due matrici commutano se i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono proporzionali tra loro.

Esercizio 1.8 *Data la matrice* 2×2*:*

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{n} \cdot \hat{\sigma}\right), \qquad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1,$$

determinare la soluzione (matriciale!) X *dell'equazione algebrica:*

$$X + A + \frac{1}{2}XA = 0.$$

Esercizio 1.9 *Data, in* $\mathbb{R}^{n+1}$ *la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} (u,v) & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

con $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, \dots, n$, *e* (u, v) *l'ordinario prodotto scalare in* $\mathbb{R}^n$. *Si determinino* $\operatorname{Im} A$ *e* $\operatorname{Ker} A^\dagger$ *e si verichi* $\mathbb{R}^{n+1} = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^\dagger$.

Esercizio 1.10 *Data, nello spazio euclideo complesso a* $N{+}1$ *dimensioni* $\mathbb{E}^{N+1}$*, la matrice:*

$$A = \left(\begin{array}{c:ccccc} q_0 & q_1 & q_2 & & \dots & q_N \\ \hdashline \bar{q}_1 & & & & & \\ \bar{q}_2 & & & 0_{N \times N} & & \\ \vdots & & & & & \\ \bar{q}_n & & & & & \end{array}\right), \qquad q_0 \in \mathbb{R},$$

trovare $\operatorname{Im} A$ *e* $\operatorname{Ker} A$ *e verificare che* $\mathbb{E}^{N+1} = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^\dagger$.

Esercizio 1.11 *Determinare per quali valori di* α *e* β *la matrice*

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2$$

un proiettore, essendo P_1 *e* P_2 *proiettori ortogonali* $(P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0)$*.*

Esercizio 1.12 *Dire sotto quali condizioni la matrice*

$$A = \alpha \mathbb{I} + \beta \underline{u}\ \underline{v}^\dagger$$

normale.

Esercizio 1.13 *Si consideri la matrice di Pauli* σ_3 *e, nello spazio lineare* $M_2(\mathbb{C})$ *delle matrici* 2×2 *a elementi complessi, si introduca l'operatore:*

$$A : X \to Y = [\sigma_3, X].$$

Si calcolino $\mathrm{Ker}\, A$ *e* $\mathrm{Im}\, A$ *e si verifichi che* $M_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Im}\, A$.

Esercizio 1.14 *Siano* P_1 *e* P_2 *gli operatori che proiettano rispettivamente lungo le direzioni dei vettori*

$$\underline{v}^{(1)} = (1, 2, -1) \qquad \underline{v}^{(2)} = (2, -1, 0).$$

Calcolare la traccia dell'operatore:

$$\frac{\mathbb{I} - P_2}{\mathbb{I} + \frac{2}{51}P_1 + \frac{1}{10}P_2}$$

Esercizio 1.15 *Si consideri l'equazione matriciale* $[\mathbf{A}, \mathbf{X}] = 0$ *dove* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{X}$ *sono matrici due per due a traccia nulla.*

1. *Si determini la forma della soluzione* $\mathbf{X} = \mathbf{x} \cdot \underline{\sigma}$ *soddisfacente alla condizione* $\mathbf{X}^2 = \sigma_0$*, dove con* $\underline{\sigma}$ *si è indicato il vettore delle matrici di Pauli.*
2. *Si scriva* $\mathbf{X}$ *in modo esplicito per il caso* $\mathbf{A} = \sigma_2 + 2\sigma_3$.

Esercizio 1.16 *Si consideri la matrice di Pauli* σ_3 *e, nello spazio lineare* $M_2(\mathbf{C})$ *delle matrici* 2×2 *ad elementi complessi si introduca l'operatore:*

$$A : X \to Y \ = \ [\sigma_3, X]$$

Si determinino $Ker_A = \{X \ : \ [A, X] \ = \ 0\}$ *e* R_A *(range di* A*)* $= \{Y : \ Y = [A, X]$ *per qualche* $X \ \in M_2(\mathbf{C})\}$.

Esercizio 1.17 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

agente sullo spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ *dimostrare che:*

$$\begin{aligned} Ker_{A^\dagger} &= \{\vec{x}: \; x_1 = \alpha, \; x_2 = -\alpha, x_3 = \alpha \quad per\ qualche\ \alpha \in \mathbf{R}\} \\ R_A &= \{\vec{x} : x_1 = \beta, x_2 = \beta + \gamma, x_3 = \beta\gamma, \quad per\ qualche\ \beta, \; \gamma \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

Verificare inoltre la proprietà:

$$R_A \oplus Ker_{A^\dagger} = \mathbf{R}^3$$

Esercizio 1.18 *Siano* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *una base ortonormale dello spazio euclideo complesso* E^3*. Per quali valori del parametro complesso* α *i 3 vettori:*

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

$$\vec{v}_2 = \alpha\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}_3 = \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

sono linearmente dipendenti?

Esercizio 1.19 *Calcolare*

$$\mathrm{tr}|v(z)\rangle\langle v(z)|$$

dove $|v(z)\rangle$ *il vettore colonna di componenti*

$$v_k = z^k \qquad k = 1, \ldots, N$$

Esercizio 1.20 *Nello spazio delle matrici reali* $N \times N$*, munito del prodotto scalare*

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(x^t\, Y)$$

definito l'operatore:

$$\mathcal{A} : \, X \to Y = [A, X]$$

con A *matrice assegnata.*

1. *Determinare* $\mathcal{A}^\dagger$*.*
2. *Assumendo* A *diagonale* $A_{ij} = a_i\,\delta_{ij}$ *con gli elementi* a_i *distinti, si ottiene chiaramente:*

   $$Y_{ij} = (\mathcal{A}(X))_{ij} = (a_i - a_j)X_{ij}$$

   Si dimostri che 0 *un autovalore di* $\mathcal{A}$ *di molteplicit* N *e se ne determino le "automatrici".*

Esercizio 1.21 *Dimostrare che ogni operatore di proiezione su* $\mathbb{C}^2$ *si pu scrivere mediante le matrici di Pauli nella forma:*

$$P = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

dove $\vec{n}$ *un vettore di modulo* 1 *e* $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Esercizio 1.22 *Sia*

$$\begin{aligned}
U|e^{(1)}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\left(|e^{(1)}\rangle + |e^{(2)}\rangle + |e^{(3)}\rangle\right) \\
U|e^{(2)}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|e^{(1)}\rangle - |e^{(2)}\rangle\right) \\
U|e^{(3)}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}\left(|e^{(1)}\rangle + |e^{(2)}\rangle - 2|e^{(3)}\rangle\right)
\end{aligned}$$

1. *Dimostrare che* U *unitario.*
2. *Determinare il vettore che lasciato invariato da* U *(cio* $U|u\rangle = |u\rangle$*).*

Esercizio 1.23 *Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\exp(\alpha P) = \mathbb{I} + \alpha P$$

dove P un operatore idempotente: $P^2 = P$.

Esercizio 1.24 *Siano*

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

le N radici dell'unit.

Si considerino i vettori $\vec{v}^{(j)}$ di componenti

$$v_k^{(j)} = \frac{(\omega_k)^j}{\sqrt{N}}$$

e si dimostri che essi costituiscono una base ortonormale.

Esercizio 1.25 *Sia $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^3$ una base ortonormale nello spazio euclideo tridimensionale. Su questa base l'operatore U agisce secondo la legge:*

$$\begin{aligned} U\vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \\ U\vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ U\vec{e}_3 &= \alpha\,\vec{e}_1 + \beta\,\vec{e}_2 + \gamma\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Scrivere la matrice che rappresenta U nella base in questione. Per quali valori di α, β, γ U una matrice unitaria?

2 Autovalori ed autovettori

Esercizio 2.1 *Si consideri lo spazio lineare S delle matrici $n \times n$ a elementi reali, dotato del prodotto scalare:*

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}(X^\dagger Y)$$

e in esso l'operatore lineare:

$$A : X \to Y = [a, X],$$

essendo a una matrice diagonale $n \times n$ con elementi tutti distinti.

1. *Calcolare $A^\dagger$.*

2. *Dimostrare che* $M = \{X : X_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ *un sottospazio invariante di* A *e che per ogni* $Y \in M$ *risulta* $\mathrm{Tr}(a^k Y) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

3. *Mostrare che la decomposizione in somma diretta:* $S = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^\dagger$ *non altro che la decomposizione di una matrice* $n \times n$ *nella sua parte diagonale e nella sua parte fuori–diagonale.*

4. *Esistono autovalori non nulli per l'operatore* A*?*

1. Denotiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli elementi diagonali di a e determiniamo gli elementi di matrice di $A(X)$:

$$A(X)_{ij} = [a, X]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_{kj} - X_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} X_{kj} - X_{ik} \lambda_k \delta_{kj} = (\lambda_i - \lambda_j)\, X_{ij} \tag{2}$$

L'operatore $A^\dagger$ definito dall'equazione:

$$\left(A^\dagger(X), Y\right) = (X, A(Y)) \qquad \forall\, X, Y \in S$$

Nel nostro caso:

$$(X, A(Y)) = \mathrm{Tr}\left(X^\dagger A(Y)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ji} (A(Y))_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ji}\, (\lambda_j - \lambda_i)\, Y_{ji}$$

$$\left(A^\dagger(X), Y\right) = \mathrm{Tr}\left((A^\dagger(X))^\dagger Y\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (A^\dagger(X))_{ji} Y_{ji}$$

Uguagliando le due espressioni e sfruttando l'arbitrariet della matrice Y, troviamo:

$$(A^\dagger(X))_{ji} = X_{ji}\, (\lambda_j - \lambda_i) = (A(X))_{ji}$$

Quindi:

$$A^\dagger = A$$

2. Sommando due matrici con elementi diagonali nulli o moltiplicando una matrice a elementi diagonali nulli per uno scalare si ottiene comunque una matrice a elementi diagonali nulli, quindi M un sottospazio vettoriale di S. Per dimostrare che un sottospazio invariante dobbiamo far vedere che $A(M) = M$. Mostriamo per prima cosa che applicando A ad elementi di M si ottengono elementi di M. Da (2) otteniamo:

$$(A(X))_{ii} = (\lambda_i - \lambda_i)\, X_{ii} = 0 \implies A(X) \in M\ \forall X \in S$$

quindi vale $A(S) \subseteq M$ e, a maggior ragione $A(M) \subseteq M$, . Mostriamo ora che ogni elemento di M pu essere scritto come immagine sotto A di un elemento di M. Sia Y un elemento di M

$$Y = A(X) \implies Y_{ij} = (A(X))_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) X_{ij}$$

Quindi Y l'immagine sotto A dell'elemento X di M cos definito:

$$\begin{cases} X_{ii} = 0 & i = 1, \ldots, n \\ X_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & 1 \leq i \neq j \leq n \end{cases}$$

Per questo passaggio cruciale la condizione che gli elementi diagonali di a siano tutti distinti. Ne concludiamo che $A(M) \supseteq M$, ma d'altra parte avevamo visto che valeva anche $A(M) \subseteq M$ e quindi $A(M) = M$.

3. Dal punto precedente segue che $\mathrm{Im}(A) = M$. Infatti abbiamo visto che $A(S) \subseteq M$ e $A(M) = M$, da cui segue $A(S) = M$. Poich A hermitiano $\operatorname{Ker} A^\dagger = \operatorname{Ker} A$. D'altra parte X appartiene a $\operatorname{Ker} A$ se:

$$A(X) = 0 \implies (A(X))_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k)X_{ik} = 0 \quad \forall i,k \implies X_{ik} = 0 \quad \text{per } i \neq k$$

Quindi $\operatorname{Ker} A$ il sottospazio di S delle matrici diagonali.

4. Notiamo che poichè A è hermitiana è diagonalizzabile e quindi molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di A coincidono. D'altra parte abbiamo visto che il nucleo di A è il sottospazio delle matrici diagonali che ha dimensione n che è quindi anche la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$. A è un endomorfismo dello spazio delle matrici $n \times n$ che ha dimensione n^2. Devono quindi esistere, tenendo conto delle molteplicità, altri $n^2 - n$ autovalori, quindi A possiede sicuramente autovalori non nulli.

Per completezza determiniamo ora quali sono. X è un "autovettore" di A se vale l'equazione:

$$A(X) = \mu X \implies (A(X))_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k)X_{ik} = \mu X_{ik} \quad \forall i,k$$

Notiamo che se X ha un unico elemento non nullo fuori diagonale, cioè se

$$X = e_{lm} \qquad (e_{lm})_{ik} = \delta_{il}\delta_{km} \quad l \neq m$$

l' equazione agli autovalori soddisfatta con $\mu = (\lambda_l - \lambda_m)$, infatti:

$$\begin{aligned} &(A(e_{lm}))_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k)(e_{lm})_{ik} = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{il}\delta_{km} = \\ &= (\lambda_l - \lambda_m)\delta_{il}\delta_{km} = (\lambda_l - \lambda_m)(e_{lm})_{ik} \quad \forall i,k \end{aligned}$$

L'operatore A possiede quindi autovalori non nulli (è possibile dimostrare che il minimo numero di autovalori non nulli distinti è $2n - 2$): $\lambda_{lm} = \lambda_l - \lambda_m \quad 1 \leq l \neq m \leq n$.

Esercizio 2.2 *Trovare la matrice U che diagonalizza la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cio tale che:

$$A_d = U^{-1}AU$$

Esercizio 2.3 *Determinare autovalori e autovettori dell'operatore ciclico:*

$$T : (x_1, \ldots, x_N) \to (x_2, \ldots, x_N, x_1).$$

Notiamo che vale l'identità:

$$T^N - \mathbb{1} = 0$$

Quindi il polinomio caratteristico dell'operatore ciclico è:

$$\lambda^N - 1 = 0 \qquad \lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}}, \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Gli autovalori sono tutti distinti e quindi avremo un autovettore per ciascun autovalore. Le equazioni per gli autovettori sono date da:

$$T\vec{x} = e^{\frac{2\pi i k}{N}}\vec{x} \implies \begin{cases} x_2 = e^{\frac{2\pi i k}{N}} x_1 \\ x_3 = e^{\frac{2\pi i k}{N}} x_2 \\ \vdots \\ x_N = e^{\frac{2\pi i k}{N}} x_{N-1} \\ x_1 = e^{\frac{2\pi i k}{N}} x_N \end{cases} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Poiché ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1, una delle equazioni del sistema è dipendente dalle altre $N-1$. Eliminando l'ultima equazione possiamo riscrivere il sistema nella forma:

$$x_{m+1} = e^{\frac{2\pi i k}{N}} x_m \implies x_{m+1} = e^{m\frac{2\pi i k}{N}} x_1 \qquad m = 1, \dots, N-1$$

Ponendo $x_1 = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$ troviamo che un insieme di N autovettori indipendenti per l'operatore ciclico è dato dai vettori $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=0}^{N-1}$ di componenti:

$$\vec{x}_m^{(k)} = e^{m\frac{2\pi i k}{N}} \qquad m = 1, \dots, N \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Esercizio 2.4 *La matrice A agisce sui vettori della base canonica $e^{(i)}$ secondo la legge:*

$$\begin{aligned} Ae^{(1)} &= e^{(1)} \\ Ae^{(2)} &= e^{(1)} + 2e^{(2)} \\ Ae^{(3)} &= e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} \end{aligned}$$

Trovare autovalori e autovettori di A e scriverne la decomposizione spettrale.

Esercizio 2.5 *Calcolare autovalori e autovettori della matrice $B = A^2 - \mathbb{I}$, essendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.6 *Determinare la matrice A nella base ortonormale* $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$, *sapendo che A hermitiana a traccia nulla, e che:*

$$\begin{aligned} Av^{(1)} &= v^{(2)} + v^{(3)} \\ Av^{(2)} &= v^{(1)} + v^{(3)} \end{aligned}$$

Trovare poi autovalori e autovettori della matrice A.

Esercizio 2.7 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

1. *determinarne autovalori e autovettori, mostrando che questi ultimi non formano una base in* $\mathbb{R}^3$;
2. *mostrare che una base in* $\mathbb{R}^3$ *invece fornita dall'insieme degli autovettori di A e di uno dei vettori appartenenti a* $\operatorname{Ker} A^2$;
3. *verificare che* $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^\dagger$.
4. *dire come deve essere fatto un vettore* y *tale che l'equazione* $y = Ax$ *ammetta soluzioni.*

Esercizio 2.8 *Dato il vettore* $\vec{a} = (1, -1, 2)$, *sia A l'operatore lineare tale che:*

$$A\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{v}, \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Calcolare gli autovalori e gli autovettori normalizzati di A.

Esercizio 2.9 *Diagonalizzare la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nei due casi:

1. $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$,
2. $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$.

Determinare $\operatorname{Im} A$ *e* $\operatorname{Ker} A$

Esercizio 2.10 *E' possibile costruire due matrici hermitiane* 2×2 *che anticommutino e siano simultaneamente diagonalizzabili? (Fornire la dimostrazione per l'eventuale risposta positiva o negativa).*

Esercizio 2.11 *Per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ l'operatore definito dalle relazioni:*

$$U\underline{e}^{(1)} = \alpha\underline{e}^{(2)}; \qquad U\underline{e}^{(2)} = \beta\underline{e}^{(3)}; \qquad U\underline{e}^{(3)} = \gamma\underline{e}^{(1)}$$

unitario? Quali sono i suoi autovalori ed autovettori?

Esercizio 2.12 *Sia $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ una base ortonormale in $\mathbb{E}^N$. Dato l'operatore*

$$A = \mathbb{I} + \lambda \sum_{k=0}^{N} \alpha_k |v^{(k)}\rangle\langle v^{(k)}|, \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}\ \forall k, \alpha_k \neq \alpha_r \text{ per } k \neq r,$$

1. *determinare i suoi autovalori e autovettori;*
2. *dire per quali valori di λ esso non invertibile;*
3. *scelto uno dei suddetti valori di λ, individuare le condizioni cui deve soddisfare il vettore $\underline{y} \in \mathbb{E}^N$ affinch abbia soluzioni l'equazione $\underline{y} = A\underline{x}$.*

Esercizio 2.13 *Dati in $\mathbf{C}^3$ i tre vettori $\mathbf{v}^{(1)} = (1,0,0)$, $\mathbf{v}^{(2)} = (0,1,\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\mathbf{v}^{(3)} = (0,\mathrm{i},1)/\sqrt{2}$, linearmente indipendenti*

1. *si trovino gli operatori di proiezione corrispondenti ai sottospazi da essi generati, $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{P}^{(3)}$.*
2. *Si costruisca la matrice con autovalori $\lambda_1 = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\lambda_2 = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1$, ed autovettori $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$, rispettivamente.*

Esercizio 2.14 *Dato in $\mathbf{R}^3$ l'asse con versore unitario $\hat{\epsilon} = \cos\psi\mathbf{e}^{(1)} + \sin\psi\mathbf{e}^{(2)}$, si determini la matrice unitaria $\mathbf{U}_{\hat{\epsilon}}(\phi)$, che descrive una rotazione di angolo ϕ intorno a quest'asse. Si trovino autovalori ed autovettori della matrice $\mathbf{U}_{\hat{\epsilon}}(\phi)$. Si specializzi il risultato al caso $\psi = \phi = \pi/4$.*

Esercizio 2.15 *Si consideri il seguente cambiamento di coordinate in $\mathbf{R}^3$ (Jacobi):*

$$\begin{aligned} x' &= 1/\sqrt{3}(x+y+z) \\ y' &= 1/\sqrt{2}(x-y) \\ z' &= 1/\sqrt{6}(x+y-2z) \end{aligned}$$

si dimostri che la corrispondente matrice e' unitaria (anzi, ortogonale) e se ne determino autovalori e autovettori.

Esercizio 2.16 *Sia* $\{\vec{e}_i\}$ $(i = 1,2,3)$ *una base ortonormale in* $\mathbf{E}^3$. *Per quali valori di* α, β, γ *l'operatore* U *definito dalle relazioni:*

$$\begin{aligned} U\vec{e}_1 &= \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ U\vec{e}_2 &= \beta\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \\ U\vec{e}_3 &= \gamma\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{aligned}$$

e' unitario ed ha uno degli autovalori uguale a 1 *? Determinare inoltre l'autovettore associato al suddetto autovalore.*

Esercizio 2.17 *Calcolare autovalori e autofunzioni di*

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle v| - |v\rangle\langle u|,$$

dove $|u\rangle$ *e* $|v\rangle$ *sono ortonormali.*

Esercizio 2.18 *Determinare autovalori e autovettori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza ai valori del parametro α *che annullano il determinante della matrice.*

Esercizio 2.19 *Sia* $\mathbb{E}$ *uno spazio euclideo finito dimensionale, su* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *e indichiamo con* $(\cdot,\cdot)$ *il suo prodotto scalare. In* $\mathbb{F} = \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ *si consideri il prodotto scalare*

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}\left(X^\dagger Y\right), \qquad X, Y \in \mathbb{F},$$

e l'operatore lineare:

$$D_A X = \{A, X\} = AX + XA,$$

con $A \in \mathbb{F}$ *fissato.*

Mostrare che D_A *autoaggiunto se e solo se* $A^\dagger = A$, *e che se* $\{e_i\}$ *una base ortonormale (in* $\mathbb{E}$*) di autovettori di* A, *una base ortonormale (in* $\mathbb{F}$*) di autovettori di* D_A *data dalle diadi* D_{ij} *definite da* $D_{ij}(u) = e_i(e_j, u)$, $\forall u \in \mathbb{E}$.

Esercizio 2.20 L *e* M *sono due matrici hermitiane* 3×3 *commutanti. Sappiamo che gli autovettori* $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ *di* L *e* M *sono univocamente determinati e che i corrispondenti autovalori di* L^2 *e* M^2 *sono, rispettivamente,* $l^2, l^2, \lambda^2 \neq l^2$ *e* $m^2, m^2, \mu^2 \neq m^2$. *Quali sono le possibili terne di autovalori di* L *e* M *per cui questo accade?*

Esercizio 2.21 *Siano $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ una base ortonormale dello spazio euclideo complesso E^3. Sia A la matrice definita dalla decomposizione spettrale:*

$$A = \alpha \vec{e}_1 \vec{e}_1^\dagger + \beta \vec{e}_2 \vec{e}_2^\dagger + \gamma \vec{e}_3 \vec{e}_3^\dagger$$

Determinare $\mathrm{tr}A$ e $\det A$. Scrivere la forma esplicita della matrice assumendo che la componente $k-$esima di $\vec{e}_i$ sia pari a δ_{ik}.

Esercizio 2.22

1. *Dimostrare che nello spazio euclideo delle matrici $N \times N$ a elementi complessi $\mathbb{C}^{N^2}$, munito del prodotto scalare*

   $$(X, Y) = \mathrm{Tr}(X^\dagger Y)$$

   l'operatore lineare $\mathcal{A}$ definito dalla relazione:

   $$\mathcal{A} : X \to Y = [A, X]$$

   con A matrice $N \times N$, hermitiano se A hermitiana.

2. *Se ne trovino autovalori e "automatrici" nel caso $N = 2, A = \sigma_3$, utilizzando la base delle matrici di Pauli.*

Esercizio 2.23 *Determinare autovalori e autovettori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 2 & \frac{1+i\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.24 *Dato un vettore reale $\vec{n}$ di modulo 1,*

1. *Determinare α e β in modo tale che l'operatore*

$$P = \alpha\mathbb{I} + \beta\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \alpha\mathbb{I} + \beta\sum_k nk\,\sigma_k$$

sia idempotente ($P^2 = P$); σ_k sono le matrici di Pauli.

2. *Quali sono gli autovalori di P? e i corrispondenti autovettori?*

Esercizio 2.25 $|u\rangle$ *e* $|v\rangle$ *sono due vettori arbitrari in uno spazio euclideo di dimensione N. Data la matrice*

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle v|$$

1. *calcolarne autovalori e autovettori;*
2. *calcolarne il determinante.*

Esercizio 2.26 *Si consideri la matrice*

$$M = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare autovalori e autovettori di M.*
2. *Senza usare il prodotto righe per colonne esplicitamente, dimostrare che $M^3 = M$.*

Esercizio 2.27 *Data la matrice*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i & 0 \\ -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calcolarne autovalori ed autovettori, e scrivere la funzione

$$F(z) = \mathrm{tr}\left((\mathbb{I} - zA)^{-1}\right)$$

determinandone le singolarit.

3 Funzioni di matrice

Esercizio 3.1 *La matrice A ha autovalori interi positivi (semplici) $\lambda_k = k$; $k = 0, ..., N-1$. Calcolare $t_n(z) := tr(\exp(zA))$.*
Caratterizzare le proprietà di analiticità di $t_n(z)$. In quale dominio del piano complesso converge la successione $t_n(z)$ per $n \to \infty$? E qual è il suo limite?

Esercizio 3.2 *Supponiamo che A sia una matrice $N \times N$ dotata della rappresentazione spettrale:*

$$A = \sum_{k=1}^{N} \left(n - \frac{1}{2}\right) P^{(n)} \qquad (P^{(n)} P^{(m)} = \delta_{nm} P^{(n)}; \quad \sum_{n=1}^{N} P^{(n)} = \mathbb{I}).$$

Calcolare $\det \exp(zA)$ *e* $\mathrm{Tr}\,\exp(zA)$*.*

Studiare le propriet di analiticit della successione di funzioni:

$$f^{(N)}(z) = \mathrm{Tr}\,\exp(zA)$$

e determinare il dominio del piano complesso in cui la successione (assolutamente) convergente, indicandone anche il limite.

Esercizio 3.3 *Trovare l'inversa della matrice $B = \mathbb{I} + 2P$, essendo P una matrice di proiezione ($P^2 = P$). E' necessario specificare il rango della matrice B?*

Esercizio 3.4 *Sia A una matrice diagonalizzabile e $f(z)$ una funzione intera. Dire come bisogna scegliere la curva chiusa C affinch valga l'identit:*

$$f(A) = \oint_C d\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta\mathbb{I} - A}.$$

Esercizio 3.5 *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

e A la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esiste la matrice $f(A)$? Perch?

Esercizio 3.6 *Sia A la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scrivere esplicitamente la funzione di matrice:

$$B(\lambda) = [\sin(\pi A - \lambda \mathbb{I})]^{-1}$$

Per quali valori della variabile complessa λ $B(\lambda)$ non definita?

Quanto vale

$$\oint_C d\lambda B(\lambda)$$

se C la circonferenza del piano complesso λ avente centro nell'origine e raggio $\pi/2$?

Esercizio 3.7 *Se $A = \vec{v} \cdot \hat{\sigma}$ (dove $\vec{v}$ un vettore reale di modulo v e $\hat{\sigma}$ il vettore di Pauli) e $F(x) = x \ln(1+x)$, determinare $\alpha(v)$ e $\beta(v)$ tali che*

$$F(A) = \alpha(v)\mathbb{I} + \beta(v)\vec{v} \cdot \sigma.$$

Esercizio 3.8

1. *Sia A una matrice hermitiana a traccia nulla. Dimostrare che $U = \exp(iA)$ una matrice unitaria a determinante 1;*
2. *sia ora*

   $$A = \begin{pmatrix} a & \rho e^{i\theta} \\ \rho e^{-i\theta} & -a \end{pmatrix};$$

   la si diagonalizzi e si scriva esplicitamente U.

Esercizio 3.9 *Siano:*

$$S(a) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che:

1. $T(a) = \exp(S(a))$
2. $T(a)T(b) = T(a+b); \qquad T^{-1}(a) = T(-a)$

Esercizio 3.10 *Trovare tutte le matrici A tali che:*

$$\exp(2\pi i A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.11 *Sia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Calcolare

$$B = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\zeta\, f(\zeta)(\zeta - A)^{-1}$$

essendo A la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e C la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/2$.

Esercizio 3.12 *Sia A una matrice che soddisfa l'equazione caratteristica: $A^3 = \mathbb{I}$.*

1. *Dire per quali valori di z definita la funzione di matrice: $(\mathbb{I} - zA)^{-1}$ e trovarne l'espressione equivalente in termini di $\mathbb{I}, A, A^2$.*
2. *Specializzare il risultato al caso particolare:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $I - zA$ è invertibile se il suo determinante è diverso da zero. D'altra parte se A ha dimensione N:

$$\det(I - zA) = \prod_{i=1}^{N} (1 - z\lambda_i)$$

dove λ_i sono gli autovalori di A. Dall'equazione caratteristica $A^3 = \mathbb{I}$ segue che il polinomio caratteristico di A è $\lambda^3 = 1$, quindi gli autovalori di A assumeranno i valori $\exp(2k\pi i/3),\ k = 1, 2, 3$ con molteplicità $m_k \geq 1, k = 1, 2, 3$. La matrice $(I - zA)$ sarà quindi invertibile per $z \neq \exp(2k\pi i/3),\ k = 1, 2, 3$.

Poichè $A^3 = I$, le uniche potenze indipendenti di A sono: $A^0,\ A^1,\ A^2$, potremo quindi scrivere:

$$(I - zA)^{-1} = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$$

con $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ determinati dall'equazione:

$$(I - zA)(\alpha I + \beta A + \gamma A^2) = I$$

Esercizio 3.13 *Supponendo A matrice diagonalizzabile, dimostrare che:*

$$\det[\exp(A)] = \exp[\mathrm{tr}(A)].$$

Sapreste estendere la dimostrazione al caso in cui A sia riducibile ad una matrice di Jordan?

Esercizio 3.14 *Data la matrice* 2×2*:*

$$A = \exp(i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma})$$

dove $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$, *essendo* n_i *le componenti di un vettore unitario e* σ_i, $i = 1, 2, 3$ *le matrici di Pauli, calcolarne autovalori e forma esplicita.*

Esercizio 3.15 *Trovare autovalori e autovettori della matrice unitaria:*

$$U = e^{i\alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\vec{\sigma}}, \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3, \qquad ||\hat{\mathbf{n}}|| = 1.$$

Esercizio 3.16 *Sia* N *una matrice* $n \times n$, *nilpotente di grado* $k \leq n$ *(cio tale che* $N^k = 0$, $N^r \neq 0$ *per* $r < k$*). Data*

$$A = \mathbb{I} + aN \qquad a \in \mathbb{C},$$

scrivere exp(A) *in funzione delle potenze di* N*.*

Estendere il risultato al caso di una generica $f(A)$, *con* $f(z)$ *intera.*

Esercizio 3.17 *Sia* P *un operatore di proiezione* $(P^2 = P)$*. Scrivere la funzione* $e^{\beta P}$ *nella forma:*

$$e^{\beta P} = \mathbb{I} + f(\beta)P,$$

con l'appropriata $f(\beta)$*.*

Esercizio 3.18 *Si calcoli la funzione di matrice* $\ln(1 - z\sigma_2)$ *utilizzando la definizione di funzione di matrice in serie di potenze. Si discuta per quali valori di* z *è definita tale funzione. Qui* σ_2 *è una delle tre matrici di Pauli.*

Esercizio 3.19 *La matrice* A *soddisfa l'equazione caratteristica* $A^2 - 3A + 2I = 0$*. Calcolare exp*(A)*.*

Esercizio 3.20 *Sapendo che det*$(A - \lambda I) = \lambda^3 - 1$, *scrivere la funzione di matrice exp*(A) *in termini di* I, A, A^2*.*

Esercizio 3.21 *La matrice* A *ha autovalori* $\lambda_1 = 1/6, \lambda_2 = 1/3, \lambda_3 = 3/2$ *e autovettori* $|v_1 >= (\sqrt{2})^{-1}(0, -i, i), |v_2 >= (\sqrt{2}))^{-1}(0, 1, 1)), |v_3 >= (1, 0, 0)$*. Calcolare la funzione di matrice* $f(A)$ *data dalla rappresentazione integrale:*

$$f(A) = (2\pi i)^{-1} \oint_{|z|=1} dz exp(-z)(zI - A)^{-1}$$

Esercizio 3.22 *Dimostrare la formula*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \exp\left(- \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j \right) = (\pi)^{N/2} (\mathrm{Det} A)^{-1/2} \tag{3}$$

nel caso in cui A è una matrice reale e simmetrica. Si suggerisce di scrivere l'argomento dell'esponenziale in termini del prodotto scalare

$$\sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j = (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \tag{4}$$

dove $\mathbf{x}$ è un vettore con componenti x_1, x_2 etc.

Esercizio 3.23 *La matrice (ciclica) A, agente sullo spazio euclideo complesso tridimensionale $\mathbf{E}^3$, e' determinata dalla sua azione su una base ortonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:*

$$A\vec{e}_i = \vec{e}_{i+1} \quad (mod\ 3)$$

Se ne calcolino autovalori e autovettori, e si determini la forma esplicita della matrice 3×3 $\exp(A)$.

Esercizio 3.24 *Considerare la coppia di equazioni matriciali:*

$$\frac{dL}{dt} = [L, A]$$
$$\frac{dM}{dt} = [M, A] + \{M, L\}$$

dove L, M, A sono matrici $N \times N$ e A e' indipendente da t.
Risolvere il sistema, con le condizioni iniziali

$$L(0) = L_0; \quad M(0) = M_0$$

dimostrando in particolare che (i) gli autovalori di L sono costanti e (ii) gli autovalori di M sono gli autovalori di $\exp(L_0 t) M_0 \exp(L_0 t)$.

Esercizio 3.25 *B una matrice nilpotente di grado 3 ($B^3 = 0$). Scrivere in funzione di $\mathbb{I}$ e delle potenze di B la matrice*

$$X = \exp\left(\mathbb{I} + \alpha B + \alpha^2 B^2\right).$$

Specializzare il risultato al caso di matrici 3×3 con

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.26 *Sia A una matrice $N \times N$ avente come autovalori i numeri interi $1, 2, \cdots, N$. Calcolare la funzione di variabile complessa $F(z) := Tr\exp(-zA)$ e discuterne le proprietà di analiticità.*

Esercizio 3.27 *Sia L una matrice con autovalori (semplici) $-l, -l+1, ..., 0, 1, ..., l-1, l$. Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} d\phi\ Tr\exp(-\phi L)$$

Esercizio 3.28 *Sia L una matrice con autovalori (semplici) $0, 1, ..., l-1, l$. Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} d\phi\ Tr\cos(\phi L)$$

Esercizio 3.29 *Sia $\{\vec{e}_j\}_{j=1,...N}$ una base ortonormale nello spazio euclideo complesso a N dimensioni. Su questa base, l'operatore U agisce secondo la legge:*

$$U\vec{e}_j = \vec{e}_{j+1}; j = 1, ...N-1$$

$$U\vec{e}_N = \vec{e}_1$$

Scrivere la matrice che rappresenta U nella base in questione, dimostrare che è unitaria e che i suoi autovalori sono le radici N-esime dell'unità. Dimostrare che, per l'operatore U valgono le proprietà:

$$detU = (-1)^N; \quad det\exp(U) = 1$$

Esercizio 3.30 *Data la matrice:*

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

1. *Si dica se diagonalizzabile e se ne determinino esplicitamente autovalori e autovettori.*
2. *Avendo posto T nella forma:*

   $$T = \mathbb{I} + S(\alpha,\beta,\gamma) := \mathbb{I} + \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3,$$

   si calcolino i commutatori $[S_i, S_j]$ $i, j = 1, 2, 3$ confrontandoli con quelli degli operatori Q, P, I definiti come:

   $$(Qf)(x) = xf(x); \qquad (Pf)(x) = \frac{df}{dx}; \qquad (If)(x) = f(x); \qquad \forall f \in C^\infty_{[a,b]}.$$

3. *Si determini* $A(\alpha, \beta, \gamma) = \exp[tS(\alpha, \beta, \gamma)]$*, dimostrando che:* $A(\alpha, \beta, \gamma) = T(\alpha t, \beta t + \frac{1}{2} t^2 \alpha\gamma, \gamma t)$.
4. *Si verifichi che* $\operatorname{Im} S \oplus \operatorname{Ker} S^t = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.31 *Sia* T *la matrice ciclica* $N \times N$ *definita dalle relazioni:*

$$\begin{array}{lll} Te^{(k)} = e^{(k+1)} & k = 1, \dots, N-1 & \\ & & (e^{(j)})_k = \delta_{jk} \\ Te^{(N)} = e^{(1)} & & \end{array}$$

Si osservi che vale la propriet $T^N = \mathbb{I}$.

Si consideri la matrice

$$A = \frac{\mathbb{I} + \alpha T}{\mathbb{I} - \alpha T} \qquad 0 < \alpha < 1$$

e se ne determini la norma, utilizzando la definizione:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} \sqrt{(Ax, Ax)}$$

dove $(\cdot, \cdot)$ *l'usuale prodotto scalare in* $\mathbb{E}^N$.

Esercizio 3.32 *Data la matrice* $A = z\sigma_3$, $z \in \mathbb{C}$,

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare limite e raggio di convergenza della serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{tr}\,(A^n)\,.$$

Esercizio 3.33 *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^3$ *si consideri l'operatore* A*, definito dalla sua azione sui vettori di una base ortonormale* $|e^{(i)}\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$*:*

$$\begin{array}{l} A|e^{(1)}\rangle = |e^{(3)}\rangle \\ A|e^{(2)}\rangle = |e^{(1)}\rangle + |e^{(3)}\rangle \\ A|e^{(3)}\rangle = |e^{(1)}\rangle \end{array}$$

1. *Si scriva la matrice* 3×3 $(A_{ij} = \langle e^{(i)}|\, A\, |e^{(j)}\rangle)$ *che rappresenta* A *nella base assegnata e se ne calcolino gli autovalori.* (2)
2. *Si mostri che* $\mathrm{Ker(A)}$ *l'insieme dei vettori paralleli a*

   $$|v^{(0)}\rangle = |e^{(1)}\rangle - |e^{(2)}\rangle + |e^{(3)}\rangle$$

   e che $\mathrm{Im(A^t)}$ *il piano di equazione* $x_1 - x_2 + x_3 = 0$*. Si mostri che*

   $$\mathbb{E}^3 = \mathrm{Ker(A)} \oplus \mathrm{Im(A^t)}. \qquad (2)$$

3. *Si calcoli la funzione* $\exp(za)$*, scrivendola come combinazione lineare di* $\mathbb{I}, A, A^2$*, usando il teorema di Cayley–Hamilton e lo sviluppo in serie dell'esponenziale. Si determini in particolare la traccia di* $\exp(za)$*.*

Esercizio 3.34 *Si consideri la successione di funzioni*

$$f_N(z) = \mathrm{tr}\left(e^{zA_N}\right)$$

con A_N *come nell'esercizio precedente. Se ne determini l'espressione esplicita, e si individui il dominio del piano complesso in cui la successione* $\{f_N(z)\}$ *converge, e se ne calcoli il limite.*

Esercizio 3.35 *Utilizzando la ben nota espressione di una matrice* 2×2 *in termini di matrici di Pauli:*

$$A = a_0\,\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{3} a_k\sigma_k \;:= a_0\,\mathbb{I} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}$$

trovare le condizioni su $(a_0, \vec{a})$ *che rendono la matrice* A *un proiettore; determinare, inoltre, la direzione su cui proietta* A *(cio l'autoversore di* A *con autovalore* 1*).*

Esercizio 3.36 *Dimostrare che se $\mathcal{H}$ una matrice Hermitiana, le matrici:*

$$\mathcal{U} = \exp(i\mathcal{H}) \qquad \mathcal{V} = (1 + i\mathcal{H})(1 - i\mathcal{H})^{-1}$$

sono entrambe unitarie. Trovarne l'espressione esplicita nel caso in cui si abbia:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{3} a_k \sigma_k$$

dove le σ_k sono le matrici di Pauli.

Esercizio 3.37 *Sapendo che*

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^3 - 1$$

scrivere la funzione di matrice $\exp(A)$ *in termini di* $\mathbb{I}, A, A^2$.

Esercizio 3.38 *Siano A e B le seguenti matrici 2×2:*

$$A := a_0 \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \qquad B := b_0 \mathbb{I} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

con $\vec{a} = \alpha\,(1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$. Si calcoli esplicitamente $\exp([A, B])$.

Esercizio 3.39 *Dimostrare che se H una matrice hermitiana, la sua "trasformata di Cayley"*

$$U := \frac{1 + iH}{1 - iH}$$

unitaria.

Calcolare autovalori e autovettori di U nel caso particolare in cui $H = \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$, $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$.

Esercizio 3.40 *Dimostrare che*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \det(\exp(A\phi)) = 1$$

per ogni matrice A $N \times N$ tale che $A^N = \mathbb{I}$.

4 Sistemi di equazioni differenziali lineari

Esercizio 4.1 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\dot{x} = Ax$$

dove A *la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza del dato iniziale:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.2 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{x} = Ax$$

con la condizione iniziale $x(0) = (1,1,1)^T$*, dove* A *è la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: sviluppare la funzione di matrice che definisce la soluzione in serie di potenze

Esercizio 4.3 *Sia* P *l'operatore di proiezione :*

$$P := \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^\dagger}{(\vec{v}, \vec{v})}$$

dove $\vec{v}$ *è il vettore:* $\vec{v} = (i, 1+i, 2)$
Risolvere l'equazione differenziale:

$$\dot{\vec{x}} = P\vec{x}$$

con la condizione iniziale $\vec{x}(0) \;=\; (1,1,1)$

Esercizio 4.4 *Siano* $\vec{v}_i$ *3 vettori di una base ortonormale e siano* P_i *i corrispondenti operatori di proiezione. La matrice* A *ha per autovettori i* $\vec{v}_i$ *e come autovalori corrispondenti* $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3$*. Data l'equazione matriciale:*

$$\dot{X} = [A, X]$$

dimostrare che la sua soluzione corrispondente alla condizione iniziale $X(0) = \alpha P_1$ *e' costante (i.e.* $X(t) = X(0)$*).*

Esercizio 4.5 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_N \\ \dot{x}_j &= x_{j-1} \qquad j = 2, \dots, N \end{aligned}$$

con la condizione iniziale $x_j(0) = 1, \ j = 1, \dots, N$.

Esercizio 4.6 *Data l'equazione differenziale matriciale:*

$$\dot{X} = [A, X], \qquad A = \omega\sigma_1, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

con la condizione iniziale $x(0) = \sigma_3$, *determinare, ad ogni* t, *le componenti del vettore* $\vec{x}(t)$ *definito dalla relazione:*

$$X(t) = \vec{x}(t) \cdot \hat{\sigma}$$

Esercizio 4.7 *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^N$, *risolvere l'equazione differenziale:*

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}; \qquad \underline{x}(0) = \underline{u},$$

dove $\underline{u}$ *un vettore assegnato di norma* 1, *e* A *la matrice:*

$$\mathbb{I} + P_{\underline{u}} \equiv \mathbb{I} + |u\rangle\langle u|.$$

Esercizio 4.8 *Un momento di dipolo magnetico* $\vec{\mu}$ *immerso in un campo magnetico* $\vec{H}$ *precede secondo l'equazione del moto:*

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{H}$$

Determinare $\vec{\mu}(t)$ *assumendo* $\vec{H}$ *costante, uniforme e diretto secondo il vettore* $\vec{v}$ *di componenti* $(1,1,1)$, *e il momento magnetico diretto inizialmente lungo l'asse* x.

Poniamo

$$\vec{H} = \frac{H}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad \Longrightarrow \qquad ||\vec{H}|| = H$$

e definiamo le matrici:

$$\hat{H} = \vec{H} \cdot \vec{\sigma}, \qquad \hat{\mu} = \vec{\mu} \cdot \vec{\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad [\hat{\mu}, \hat{H}] = 2i(\vec{\mu} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{\sigma}$$

L'evoluzione della matrice $\hat{\mu}$ sarà data dall'equazione:

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} \cdot \vec{\sigma} = (\vec{\mu} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2i}\left[\hat{\mu}, \hat{H}\right] = \left[\hat{\mu}, \frac{-i\hat{H}}{2}\right]$$

Il vantaggio di essere passati ad un'equazione matriciale consiste nel fatto che ne conosciamo la soluzione:

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{2}\right)\hat{\mu}(0)\exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{2}\right)$$

Per la matrice $\hat{H}$ valgono le identità:

$$\hat{H}^{2k} = H^{2k}\mathbb{1} \qquad\qquad \hat{H}^{2k+1} = H^{2k}\vec{H}\cdot\vec{\sigma} = H^{2k+1}\frac{\vec{H}\cdot\vec{\sigma}}{H}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i\hat{H}t}{2}\right)^k = \\
&\mathbb{1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k!}(-1)^k\left(\frac{Ht}{2}\right)^{2k}\right] + i\frac{\vec{H}\cdot\vec{\sigma}}{H}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left((-1)^k\frac{Ht}{2}\right)^{2k+1}\right] = \\
&= \cos\left(\frac{Ht}{2}\right)\mathbb{1} + i\sin\left(\frac{Ht}{2}\right)\frac{\vec{H}\cdot\sigma}{H} = \\
&= \cos\left(\frac{Ht}{2}\right)\mathbb{1} + \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{Ht}{2}\right)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)
\end{aligned}$$

Ponendo $Ht/2 = \alpha$, abbiamo quindi:

$$\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \frac{1+i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \\ \frac{i-1}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \cos\alpha - \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & -\frac{1+i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \cos\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Il momento magnetico di dipolo è diretto inizialmente lungo l'asse x, quindi:

$$\hat{\mu}(0) = \vec{\mu}(0)\cdot\sigma = \mu_0\sigma_1 = \mu_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione la soluzione della nostra equazione matriciale sarà data da:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mu}(t) = \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{2}\right)\hat{\mu}(0)\exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{2}\right) = \\
&\mu_0\begin{pmatrix} \cos\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \frac{1+i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \\ \frac{i-1}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \cos\alpha - \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha - \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & -\frac{1+i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}}\sin\alpha & \cos\alpha + \frac{i}{\sqrt{3}}\sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned}
\mu_1(t) &= \mathrm{Re}(\hat{\mu}_{12}) = \frac{\mu_0}{3}\left(4\cos\left(\frac{Ht}{2}\right)^2 - 1\right) \\
\mu_2(t) &= \mathrm{Im}(\hat{\mu}_{21}) = \frac{2\mu_0}{3}\sin\left(\frac{Ht}{2}\right)\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{Ht}{2}\right) - \sin\left(\frac{Ht}{2}\right)\right) \\
\mu_3(t) &= \hat{\mu}_{11} = \frac{2\mu_0}{3}\sin\left(\frac{Ht}{2}\right)\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{Ht}{2}\right) + \sin\left(\frac{Ht}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 4.9 *Risolvere l'equazione differenziale matriciale:*

$$\frac{dX}{dt} = \{\sigma_3, X\}$$

con la condizione iniziale $x(0) = \sigma_1$.

Esercizio 4.10 *Risolvere l'equazione differenziale matriciale:*

$$\dot{X} = \sigma_+ X + X\sigma_-, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con la condizione iniziale:

$$X(0) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.11 *Sia* $X(t)$ *una matrice dipendente dal parametro reale* t*, supposta invertibile per* $t \in [a, b]$.

1. *Si dimostri che:*
$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}.$$

2. *Si risolva quindi l'equazione differenziale:*
$$\frac{dX}{dt} = \alpha X^2$$
con X *matrice* 2×2 *tale che* $X(0) = \sigma_3$.

Esercizio 4.12

1. *Si risolva l'equazione differenziale matriciale:*
$$\dot{X} = AX = (A - \mathbb{I})X + X \cdot \mathbb{I}$$
con la condizione iniziale $X(0) = \bar{X}$*, essendo* A *una matrice che soddisfa l'equazione caratteristica* $A^2 - 2A + \mathbb{I} = 0$.

2. *Si consideri il caso particolare* $\bar{X} = \sigma_3$ *e*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.13 *Considerare la coppia di equazioni matriciali:*

$$\frac{dL}{dt} = [L, A] \qquad L(0) = \bar{L}$$
$$\frac{dQ}{dt} = [Q, A] + L \qquad Q(0) = \bar{Q}$$

dove L, A, Q sono matrici $n \times n$ e, inoltre, A una matrice costante. Risolvere il sistema, dimostrando in particolare che:

1. *gli autovalori di $L(t)$ sono gli autovalori di $\bar{L}$ (costanti del moto);*
2. *gli autovalori di Q sono gli autovalori di $\bar{L}t + \bar{Q}$.*

Esercizio 4.14 *Calcolare gli autovalori della matrice 2×2 $A(x)$ ottenuta come soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{dA}{dx} = \{\sigma_1, A\}$$

con la condizione iniziale $A(0) = \mathbb{I} + \sigma_3$.

Esercizio 4.15 *Sia P un proiettore ($P^2 = P$). Risolvere l'equazione differenziale:*

$$\frac{d}{dt} X = [P, X]\,.$$

Specializzare la soluzione al caso particolare in cui P proietta lungo il vettore $(1, -1)$ e $X(0) = \sigma_3$.

Esercizio 4.16 *Sia A la matrice 2×2 data da:*

$$A = 2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3$$

e w il vettore $(1 - i, 1)$. Trovare la soluzione $v(t)$ dell'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} v(t) = A v(t) + \delta(t) w$$

che soddisfi la condizione iniziale $v(-1) = (0, 0)$.

Esercizio 4.17 *La matrice incognita $\hat{X}(t)$ soddisfa l'equazione differenziale*

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{2}\left[\hat{X}, \hat{B}\right],$$

essendo $\hat{B}$ indipendente da t. Sono possibili e, se s, a quali condizioni, e quali sono, le soluzioni per cui l'anticommutatore $\{\hat{X}(t), \hat{B}\} = 0$ per ogni t?

Esercizio 4.18 *Utilizzando la decomposizione di una matrice* 2×2 *in matrici di Pauli, scrivere in forma matriciale l'equazione vettoriale:*

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{b} \wedge \vec{j}(t),$$

con $\vec{b}$ *vettore costante e trovare la soluzione corrispondente alla condizione iniziale:* $\vec{j}(0) = (0, 0, 1)$.

Senza integrare esplicitamente l'equazione, dimostrare che il modulo del vettore $\vec{j}(t)$ *una costante del moto.*

Esercizio 4.19 *Si risolva il seguente sistema di* N *equazioni lineari:*

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \alpha(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (\text{modulo } N)$$

Suggerimento: Si trasformi il sistema in una equazione lineare vettoriale, della forma $d^2\mathbf{x}/dt^2 = A\mathbf{x}$.
Si diagonalizzi A *e si risolvano le equazioni scalari per le componenti del vettore* $\mathbf{x}$ *lungo gli autovettori di* A.

Esercizio 4.20 *Integrare l'equazione* $\ddot{\mathbf{r}} = \alpha\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}$, *con* $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0, v_0, 0)$.

Esercizio 4.21 *(a) Dato il sistema di equazioni matriciali:*

$$\dot{P} = [A, P] + \lambda Q$$
$$\dot{Q} = [A, Q] + \lambda P$$

con A *matrice costante, dimostrare che la soluzione, corrispondente ai dati inziali* $Q(0), P(0)$, *vale:*

$$P(t) = \exp(At)\,(P(0)\cosh(\lambda t) + Q(0)\sinh(\lambda t))\exp(-At)$$
$$Q(t) = \exp(At)\,(Q(0)\cosh(\lambda t) + P(0)\sinh(\lambda t))\exp(-At)$$

(b) Indicando con L *il commutatore* $[P, Q]$, *dimostrare che esso e' costante se e solo se si ha* $[L(0), A] = 0$.

Esercizio 4.22 *Calcolare la funzione di matrice exp(*A*), dove*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il risultato per calcolare la soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = (1, 1, 1).$$

La matrice A è in forma di Jordan e quindi non può essere diagonalizzata. Per calcolare $\exp(A)$ dobbiamo quindi utilizzare lo sviluppo in serie di potenze.

Scriviamo A come la somma di due matrici: una diagonale Λ e una nilpotente N.

$$A = \Lambda + N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che Λ e N commutano: $[\Lambda, N] = 0$, possiamo quindi scrivere:

$$e^A = e^{\Lambda+N} = e^{\Lambda} e^N$$

Calcoliamo quindi separatamente i due esponenziali. Per $\exp(\Lambda)$ vale banalmente:

$$e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Poiché N è nilpotente di ordine 2 ($N^2 = 0$), vale

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k = \mathbb{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Il sistema di equazioni differenziali $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ha soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} x(0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} t & e^{\lambda_1} t & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1} t \\ e^{\lambda_1} t \\ e^{\lambda_2} t \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.23 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{X} = [A, X]$$

con la condizione iniziale $X(0) = diag(1, 0, -1)$*, dove* A *è la matrice* 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq \beta$*.*

Esercizio 4.24 *Denotando con*

$$\omega_j = e^{\frac{2j\pi i}{N}} \qquad j = 1, \ldots, N$$

le radici $N-$esime dell'unità, si consideri la matrice A definita da:

$$A_{jk} = \frac{1}{N}(\omega_j)^k \qquad j, k = 1, \ldots, N$$

e il sistema di equazioni differenziali lineari $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ con la condizione iniziale:

$$\vec{x}_i(0) = 1 \qquad i = 1, \ldots, N$$

1. *Si risolva il sistema nel caso $N = 3$.*
2. *Si generalizzi il risultato al caso di N generico.*

Esercizio 4.25 *Risolvere, nello spazio euclideo a N dimensioni, l'equazione differenziale:*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

con la condizione iniziale $\vec{x}(0) = \vec{u}$, dove $\vec{u}$ un vettore di $\mathbb{E}^N$ e A la matrice:

$$A = \mathbb{I} + |u\rangle\langle u|$$

Esercizio 4.26 *Sia data l'equazione matriciale*

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB$$

dove A e B sono matrici 2×2 a traccia nulla.

1. *Determinare come deve essere scelta la condizione iniziale $X(0)$ (anch'essa una matrice 2×2 a traccia nulla), affinch $X(t)$ sia a traccia nulla (3).*

2. *Avendo posto $A = \sigma_1$, $B = \sigma_2$, scrivere la soluzione $X(t)$ nel caso considerato al punto 1.*

Esercizio 4.27 *Sia P un operatore di proiezione ($P^2 = P$) e $f(z)$ una funzione intera.*

1. *Si mostri che vale la formula*

$$f(z\,P) = f(0)\mathbb{I} + [f(z) - f(0)]\,P \qquad (3)$$

2. *Utilizzare il risultato al punto 1 per risolvere l'equazione differenziale:*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P\vec{x}$$

con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Esercizio 4.28 *Dato il sistema di equazioni differenziali:*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = [\mathbf{P}, \mathbf{A}] \qquad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = [\mathbf{Q}, \mathbf{A}] + \mathbf{P}$$

dove $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ sono matrici hermitiane e $\mathbf{A}$ una matrice antihermitiana, si dimostri che:

1. *gli autovalori di $\mathbf{P}$ sono costanti del moto;*

2. *gli autovalori di $\mathbf{Q}$ sono quelli della matrice $\mathbf{Q}(0) + \mathbf{P}(0)\,t$.*

Esercizio 4.29 *Le matrici (diagonalizzabili) L ed E variano nel tempo secondo le equazioni:*

$$\frac{dL}{dt} = [L(t), A]$$
$$\frac{dE}{dt} = [E(t), A] + \frac{1}{2}\{E(t), L(t)\}$$

dove A una matrice costante. Indicando con λ_i gli autovalori di L e con ϵ_i gli autovalori di E, dimostrare che:

1. *i $\{\lambda_i\}$ sono costanti nel tempo*
2. *gli $\epsilon_i(t)$ sono gli autovalori della matrice:*

$$\exp\left(\frac{L(0)\,t}{2}\right) E(0) \exp\left(\frac{L(0)\,t}{2}\right)$$

Esercizio 4.30 *Risolvere il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} \dot{x}_j = Z\,y_j - Y\,z_j \\ \dot{y}_j = 2(Y\,x_j - X\,y_j) \\ \dot{z}_j = 2(X\,z_j - Z\,x_j) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^{N} x_j \\ Y &= \sum_{j=1}^{N} y_j \\ Z &= \sum_{j=1}^{N} z_j \end{aligned}$$

Esercizio 4.31 *Risolvere il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

con la condizione iniziale $x(0) = (1,1,1)^t$, dove A la matrice 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Principio di Riesz

Esercizio 5.1 *Trovare massimo e minimo della funzione:*

$$F(x,y,z) \;=\; 2(x^2+y^2) + 3z^2 + 2^{3/2}yz$$

sulla sfera di raggio 2.

Esercizio 5.2 *Trovare massimo e minimo della funzione delle due variabili complesse* x *ed* y *definita da:*

$$F(x, y) = \frac{|x|^2 + 4\mathrm{Re}(\bar{x}y) + 8\mathrm{Im}(\bar{x}y) + 4|y|^2}{|x|^2 + |y|^2}$$

Dire anche a quali valori di x *e* y *essi corrispondono.*

Esercizio 5.3 *Calcolare minimo e massimo della funzione:*

$$F(\vec{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{3}{2}\mathrm{Im}(\bar{x}_2 x_3)$$

sulla sfera di raggio 2.

Dire in quali direzioni si raggiungono $\max F$ *e* $\min F$.