Esercitazione di MMF 2 del 20/12/2007

F.Musso

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$I = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^R dx \frac{\sin^4(x)}{x^4}$$

Usando la parità della funzione integranda:

$$I = \frac{1}{2}\left(\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{\sin^4(x)}{x^4} + \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^R dx \frac{\sin^4(x)}{x^4} \right)$$

Passiamo al campo complesso e aggiungiamo al cammino di integrazione una semicirconferenza Γ_ϵ congiungente i punti $(-\epsilon, \epsilon)$. Poiché $\sin^4 z/z^4$ è analitica in $z = 0$, avremo che:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} dz \frac{\sin^4(z)}{z^4} dz = 0$$

Scriviamo la funzione seno in termini di esponenziali complessi:

$$\sin^4 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6 - 4e^{-2iz} + e^{-4iz}}{16}$$

Per il lemma di Jordan:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6}{16z^4} dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^+ = Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]$ e

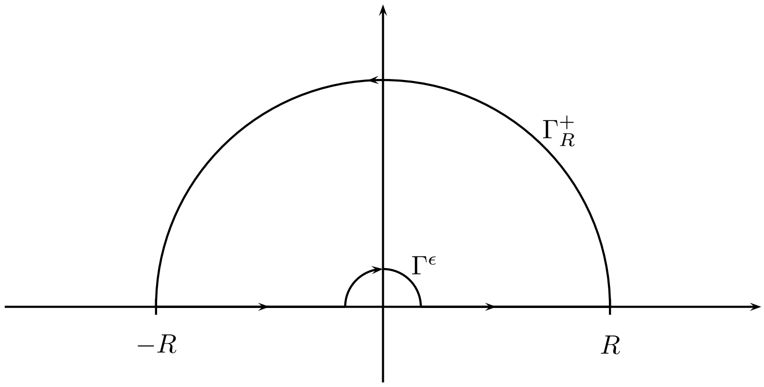
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4} dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^- = Re^{i\theta},\ \theta \in [\pi, 2\pi]$.

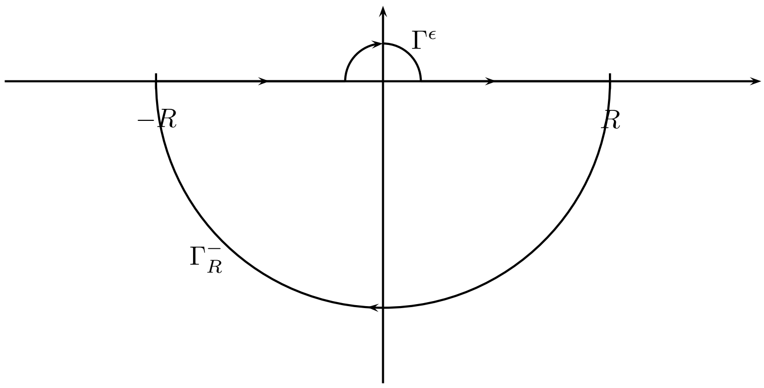
Possiamo quindi riscrivere il nostro integrale nella forma:

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{C_{R,\epsilon}^+} \frac{e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6}{16z^4} dz + \oint_{C_{R,\epsilon}^-} \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4} dz \right)$$

dove $C^+_{R,\epsilon}$ è la curva:



e $C^-_{R,\epsilon}$ è la curva:



Dal teorema dei residui segue quindi (il segno meno è dovuto al fatto che la curva $C^-_{R,\epsilon}$ è percorsa in senso orario):

$$I = -\pi i \mathrm{Res}_{z=0}\left(\frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4}\right)$$

In $z = 0$ abbiamo un polo del quarto ordine, quindi:

$$I = -\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(z^4 \frac{e^{-4iz} - 4e^{-2iz}}{16z^4}\right) = -\frac{\pi i}{96}\left(64i - 32i\right) = \frac{\pi}{3}$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right) \qquad b > a > 0$$

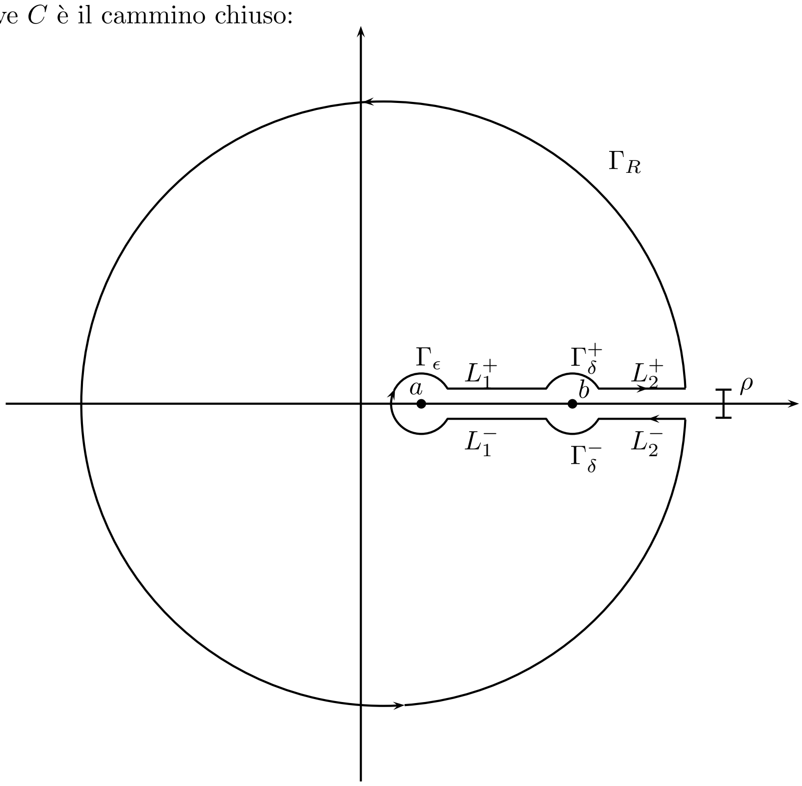
La funzione

$$\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)$$

ha due punti di diramazione in $z = a$ e $z = b$. Tagliamo il piano complesso lungo il segmento (a, b), e consideriamo l'integrale

$$I' = \oint_C dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2$$

dove C è il cammino chiuso:



Scegliendo la determinazione principale del logaritmo, abbiamo che

$$\int_{L_1^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^2$$

Su L_2^+

$$\arg(b-z)\;\to -\pi \qquad |b-z|\;\to\; x-b$$

quindi

$$\int_{L_2^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_a^b dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{x-b}{x-a}\right) - i\pi\right]^2$$

Su L_2^-

$$\arg(b-z)\;\to \pi \qquad |b-z|\;\to\; x-b$$
$$\arg(z-a)\;\to 2\pi \qquad |z-a|\;\to\; x-a$$

quindi

$$\int_{L_2^+} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_b^a dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{x-b}{x-a}\right)-i\pi\right]^2$$

Su L_1^-

$$\begin{array}{ll} \arg(b-z)\ \to 0 & |b-z|\ \to\ b-x \\ \arg(z-a)\ \to 2\pi & |z-a|\ \to\ x-a \end{array}$$

quindi

$$\int_{L_1^-} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; \int_b^a dx\,(b-x)\left[\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)-2i\pi\right]^2$$

Infine

$$\oint_{\Gamma_R} dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; -2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right)$$

Sommando tutti i termini ed usando il teorema dei residui, abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} 0=\oint_C dz\,(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2 \;\to\; 4\pi i\int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right)- \\ -4\pi^2\int_a^b dx\,(b-x)-2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Per calcolare il residuo all'infinito, dobbiamo sviluppare il logaritmo in serie di potenze in un intorno dell'infinito. Consideriamo il termine $\ln(b-z)$ che, in accordo con la nostra scelta degli argomenti, riscriviamo nella forma:

$$\ln(b-z)=\ln(z-b)-i\pi=\int dz\,\frac{1}{z-b}-i\pi=\int dz\,\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{b}{z}}-i\pi$$

Per $|b/z|<1$, la serie geometrica

$$\frac{1}{1-\frac{b}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n$$

converge uniformemente e possiamo quindi scambiare serie e integrale:

$$\ln(b-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int dz\,\frac{b^n}{z^{n+1}}-i\pi=-i\pi+\ln(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>b$$

Procedendo nello stesso modo otteniamo lo sviluppo di $\ln(z-a)$:

$$\ln(z-a)=\ln(z)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>a$$

Quindi

$$\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)=\ln(b-z)-\ln(z-a)=-i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n}\,z^{-n}\qquad |z|>b$$

da cui segue che

$$\text{Res}_{z=\infty}\left[(b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right] = (a-b)^2+2\pi i\, b(a-b)-\pi i(a^2-b^2) = (a-b)^2(1-\pi i)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b dx\,(b-x)\ln\left(\frac{b-x}{x-a}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\left[4\pi^2\int_a^b dx\,(b-x) - 2\pi i\,\text{Res}_{z=\infty}\left((b-z)\ln\left(\frac{b-z}{z-a}\right)^2\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\left[-2\pi^2(a-b)^2 - 2\pi i\,(a-b)^2(1-\pi i)\right] = \frac{(a-b)^2}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Data la serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

trovarne il raggio di convergenza R. Sapendo che $z=1$ è un punto regolare, costruire in $z=1$ il prolungamento analitico per cerchi di $f(z)$. Utilizzare le formule:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{(2n+1)!} = (2k)!\,\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}} \\
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{2n!} = (2k)!\,\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2^{k+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Dalla formula di Cauchy-Hadamard segue che il raggio di convergenza della serie è dato da:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$z=1$ è quindi un punto sulla frontiera del cerchio di convergenza. Sappiamo però che è un punto regolare ed è quindi possibile costruirvi il prolungamento analitico per cerchi. Trasliamo la serie nel punto $z=1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[(z-1)+1]^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z-1)^k$$

Per invertire l'ordine di sommatoria consideriamo separatamente il caso k pari e quello k dispari:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z-1)^k = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(z-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(z-1)^{2k+1}\right]
\end{aligned}$$

Invertendo l'ordine di sommatoria per la parte pari otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(z-1)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2n+1}{2k}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{2n+2k+1}\binom{2n+2k+1}{2k}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k}}{2k!}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{(2n+1)!}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\left[(-1)^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}}\right]
\end{aligned}
$$

Procedendo nello stesso modo per la parte dispari troviamo:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(z-1)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{2n+2k+1}\binom{2n+2k+1}{2k+1}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)!}{2n!}=\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\left[(-1)^k\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(2k+1)\,2^{k+1/2}}\right]
\end{aligned}
$$

Dobbiamo ora calcolare il raggio di convergenza. Usiamo nuovamente la formula di Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(|c_k|)^{\frac{1}{k}}$$

I coefficienti c_k sono nel nostro caso:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{(-1)^{k/2}}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2} \qquad \text{per } k \text{ pari}\\
c_k &= \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2} \qquad \text{per } k \text{ dispari}
\end{aligned}
$$

La successione dei c_k è quindi una successione oscillante. Notiamo però che vale:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\right| &\le \frac{1}{k}2^{-k/2} \qquad \text{per } k \text{ pari}\\
\left|\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)2^{-k/2}\right| &\le \frac{1}{k}2^{-k/2} \qquad \text{per } k \text{ dispari}
\end{aligned}
$$

e il segno di uguaglianza si ottiene selezionando la sottosuccessione $k=4n+2$. Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(|c_k|)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il prolungamento analitico della funzione $f(z)$ è dato quindi da:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad |z|<1 \\
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k}\left[(-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{1}{k\,2^{k+1}}\right]+ \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1}\left[(-1)^k \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(2k+1)\,2^{k+1/2}}\right] \qquad |z-1|<\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 *Calcolare per grandi valori del parametro reale x il termine dominante dell'integrale*

$$I = \int_0^1 dt\, cos(x\phi(t))f(t)$$

dove:

$$\phi(t) = t^2 - t + \frac{1}{4} \quad f(t) = cos(\frac{\pi}{2}t)$$

$$I = Re\hat{I} \quad \hat{I} = \int_0^1 dt\, e^{ix\phi(t))}cos(\frac{\pi}{2}t)$$

L'integrale I_0 può essere valutato con il metodo della fase stazionaria osservando che si tratta di un integrale 'di tipo Fourier' con una fase non monotona nell'intervallo di integrazione. Questi integrali si valutano con una 'ricetta' standard, ampiamente discussa a lezione e nelle esercitazioni: si tratta di cercare, nell'intervallo di integrazione considerato i punti di max e min della fase, dunque valutarne i punti critici e il valore sulla frontiera. Ogni punto critico , sia esso assunto in t_0, fornisce un contributo

$$I_{t_0} = \sqrt{\frac{2\pi}{|x\phi''(t_0)|}}e^{ix\phi(t_0)}f(t_0)e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x\phi''(t_0))}$$

Qualora vi siano max o min sulla frontiera , vale ancora la formula precedente moltiplicata per $1/2$. Nell'esercizio in questione, ci sono tre punti rilevanti:

$$t = 1/2, 1, 0$$

il primo è un punto critico (minimo) , gli altri sono i punti di frontiera ove la fase assume il valore massimo. i tre contributi sono:

$$I_{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{|x|}}f(1/2)e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x)}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}f(1)e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x)} = 0$$

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}f(0)e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}e^{i\frac{\pi}{4}sgn(x)}$$

Infine, sommando i contributi:

$$\hat{I} \sim (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})\sqrt{\frac{\pi}{|x|}} e^{i\frac{\pi}{4} sgn(x)}$$

$$I \sim (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})\sqrt{\frac{\pi}{|x|}} cos(\frac{\pi}{4} sgn(x)) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})\sqrt{\frac{\pi}{|x|}}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 5 *Valutare lo sviluppo asintotico di $F(x)$ ($x > 0, x \to \infty$):*

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} dt\, e^{-x\phi(t)} f(t)$$

ove

$$\phi(t) = t^2 - t + \frac{1}{4} \quad f(t) = \frac{2t-1}{t^2 - t + 5/4}$$

Trovare, per x fissato, il numero di termini dello sviluppo che rende minima la stima dell'errore. Per $x = 7$, è possibile stimare l'integrale con un errore minore di 10^{-3}?

Qui ricadiamo nel caso dell'integrale "di tipo Laplace". Notare che l'esponenziale contiene la stessa funzione dell'esercizio precedente; ma ora cambia l'intervallo di integrazione. Nell'intervallo considerato la funzione ϕ è monotona crescente; la strada più semplice è un cambio di variabile; poniamo

$$y = t^2 - t + \frac{1}{4}$$

Invertendo rispetto a t si hanno due possibilà:

$$t_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{y}) \quad t_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{y})$$

scegliamo la prima soluzione in modo da avere correttamente $t \in [1/2, +\infty), y \in [0, \infty)$. Con questo cambio di variabile l'integrale diventa:

$$\int_0^{\infty} dy\, e^{-xy} \frac{1}{1+y}$$

Sussiste l'uguaglianza:

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{p} (-1)^n y^n + \frac{(-y)^{p+1}}{1+y}$$

Il primo termine porta al calcolo approssimato dell'integrale; sostituendo $xy = u$ e usando la formula $\int_0^\infty e^{-u} u^n du = n!$ si ottiene:

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \equiv S_p(x)$$

Il secondo termine permette di stimare l'errore commesso troncando la serie dopo $p+1$ termini:

$$\begin{aligned}|R_{p+1}(x)| &= \left|\int_0^\infty dy\, e^{-xy}\frac{(-y)^{p+1}}{1+y}\right| \le \int_0^\infty dy\, e^{-xy}\left|\frac{(-y)^{p+1}}{1+y}\right| \le \\ &\le \int_0^\infty dy\, e^{-xy}y^{p+1} = \frac{(p+1)!}{x^{p+2}}\end{aligned}$$

Notiamo che il resto $R_p(x)$ diverge per $p \to \infty$, come c'era da aspettarsi dal fatto che la serie geometrica non è convergente nell'intervallo di integrazione considerato. D'altra parte, per grandi x, il resto è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ai termini che compaiono in $F(x)$.

Per il resto vale la relazione di ricorrenza:

$$|R_p(x)| = \frac{p}{x}|R_{p-1}(x)|$$

Varrà quindi:

$$\begin{aligned}&|R_p(x)| < |R_{p-1}(x)| \quad \text{per } p < x \\ &|R_p(x)| \ge |R_{p-1}(x)| \quad \text{per } p \ge x\end{aligned}$$

Il minimo per la stima dell'errore si ottiene quindi considerando un numero di termini uguale alla parte intera di $x-1$.

Per $x = 7$, la minima stima dell'errore sarà quindi data da:

$$|R_6(x)| = \frac{6!}{7^7} \simeq 8.7\,10^{-4}$$

che è inferiore all'errore minimo richiesto (la differenza reale è $F(7) - S_5(7) \simeq -0.45\,10^{-4}$).