Esonero di MMF II del 10/01/2008

D. Levi, V. Lacquaniti, F.Musso

Svolgere un esercizio di ciascun gruppo

A

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(kx)}{x^2+1}\,dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

(5 pt)

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$I = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R dx \frac{\sin^2(kx)}{x^2+1}$$

Usando la parità della funzione integranda:

$$I = \frac{1}{2}\left(\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{\sin^2(kx)}{x^2+1} + \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R dx \frac{\sin^2(kx)}{x^2+1}\right)$$

Passiamo al campo complesso e aggiungiamo al cammino di integrazione una semicirconferenza Γ_ϵ congiungente i punti $(-\epsilon, \epsilon)$. Poiché $\sin^2(kz)/(z^2+1)$ è analitica in $z = 0$, avremo che:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\sin^2(kz)}{z^2+1}\,dz = 0$$

Scriviamo la funzione seno in termini di esponenziali complessi:

$$\sin^2(kz) = \left(\frac{e^{ikz}-e^{-ikz}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2ikz}-2+e^{-2ikz}}{4}$$

Consideriamo separatamente il caso $k > 0$ e $k < 0$. Se $k > 0$, allora dal lemma di Jordan segue che:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^+ = Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]$ e

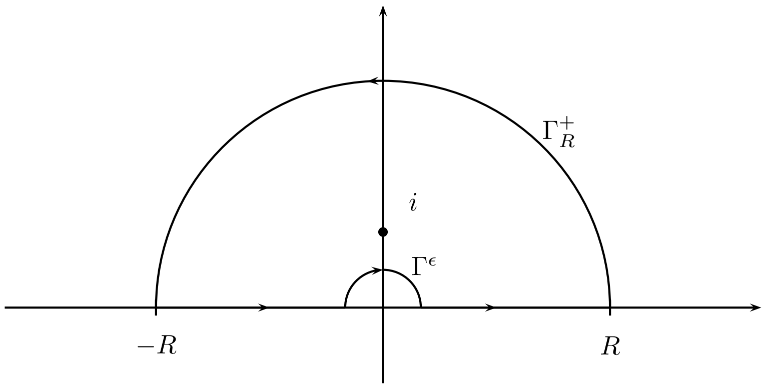
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}dz = 0$$

sulla semicirconferenza $\Gamma_R^- = Re^{i\theta},\ \theta \in [\pi, 2\pi]$.

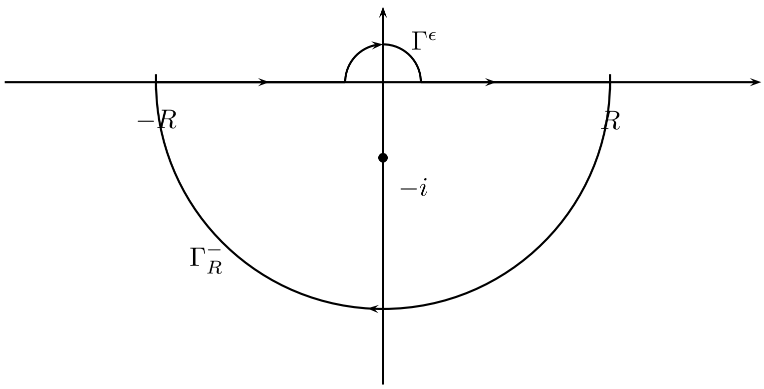
Possiamo quindi riscrivere il nostro integrale nella forma:

$$I = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{C^+_{R,\epsilon}}\frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}dz + \oint_{C^-_{R,\epsilon}}\frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}dz\right)$$

dove $C^+_{R,\epsilon}$ è la curva:



e $C^-_{R,\epsilon}$ è la curva:



Dal teorema dei residui segue quindi:

$$I = -\pi i\left[\mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}\right) - \mathrm{Res}_{z=-i}\left(\frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}\right)\right] = -\frac{\pi}{8}\left(2e^{-2k}-2\right)$$

Se $k<0$ dal lemma di Jordan segue:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^-}\frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}dz = 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+}\frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}dz = 0$$

Quindi

$$I = -\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{C^-_{R,\epsilon}}\frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}dz + \oint_{C^+_{R,\epsilon}}\frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}dz\right) =$$
$$= \pi i\left[\mathrm{Res}_{z=-i}\left(\frac{e^{2ikz}-2}{4(z^2+1)}\right) - \mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{-2ikz}}{4(z^2+1)}\right)\right] = -\frac{\pi}{8}\left(2e^{2k}-2\right)$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^{i\alpha}}{x^2+x+1}\,dx \qquad \alpha > 0$$

(10 pt)

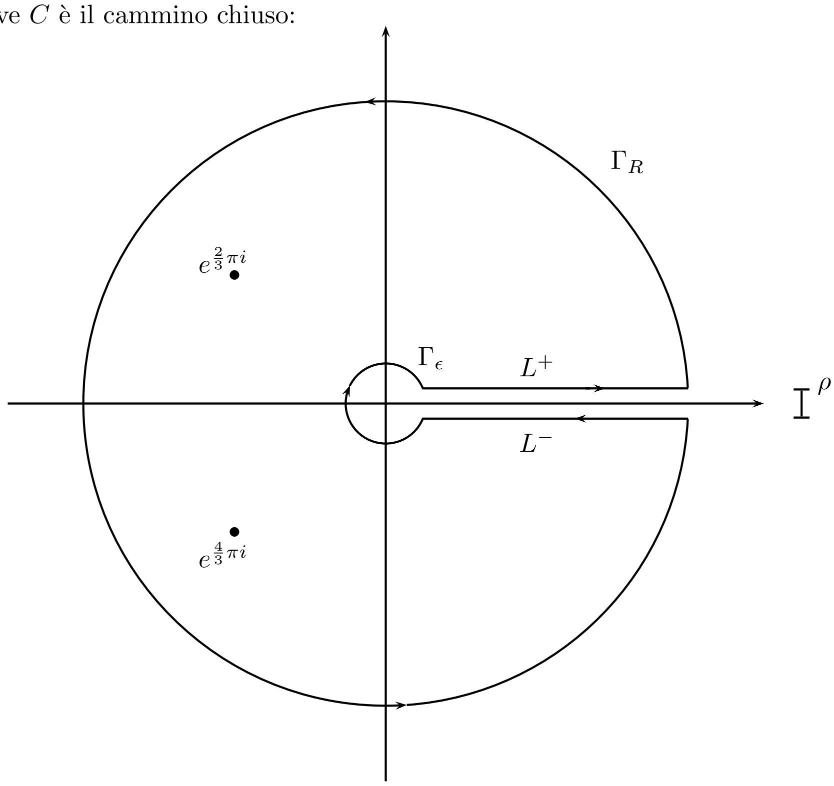
La funzione integranda è una funzione polidroma (per $\alpha \notin \mathbb{N}$), con punto di diramazione $x = 0$.

$$x^{i\alpha} = e^{i\alpha\ln(x)}$$

Passiamo al campo complesso e consideriamo l'integrale

$$I = \oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{e^{i\alpha\ln(z)}}{z^2+z+1}\,dz$$

dove C è il cammino chiuso:



nel limite $R \to \infty, \epsilon, \rho \to 0$. Abbiamo che $zf(z)$ tende uniformemente a zero sia per $\epsilon \to 0$ che per $R \to \infty$, da cui segue che gli integrali su Γ_R e su Γ_ϵ tendono entrambi a zero. Prendendo su L^+ la determinazione principale del logaritmo, avremo che

$$\int_{L^+} \frac{e^{i\alpha \ln(z)}}{z^2+z+1}\, dz \to \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha \ln(x)}}{x^2+x+1}\, dx$$

Su L^-, avremo che $\ln(z) \to \ln(x) + 2\pi i$ e quindi:

$$\int_{L^-} \frac{e^{i\alpha \ln(z)}}{z^2+z+1}\, dz \to \int_\infty^0 \frac{e^{i\alpha(\ln(x)+2\pi i)}}{x^2+x+1}\, dx$$

Dal teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
&\oint_C \frac{e^{i\alpha \ln(z)}}{z^2+z+1}\, dz = \left(1 - e^{-2\pi\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha \ln(x)}}{x^2+x+1}\, dx = \\
&= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=e^{\frac{2}{3}\pi i}} + \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{4}{3}\pi i}} \right) \frac{e^{i\alpha \ln(z)}}{z^2+z+1} = \\
&= 2\pi i \frac{\exp(-\frac{2\alpha\pi}{3}) - \exp(-\frac{4\alpha\pi}{3})}{i\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\int_0^\infty \frac{x^{i\alpha}}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\exp(-\frac{2\alpha\pi}{3}) - \exp(-\frac{4\alpha\pi}{3})}{1 - \exp(-2\pi\alpha)}$$

B

Esercizio 3 *Data la serie*

$$f(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, \Gamma(n+1/2)\, z^n$$

trovarne il raggio di convergenza R.

Costruire il prolungamento analitico per cerchi di $f(z)$ centrato nel punto $z = -1$ (che è un punto regolare), utilizzando l'uguaglianza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+k}{n!}\, \Gamma(n+k+1/2) = \Gamma(k+1/2)\, \frac{2k-1}{2^{k+5/2}}$$

Dire, infine, quali sono i punti singolari di $f(z)$ sul cerchio $|z| = R$.

(10 pt)

Usiamo il criterio del rapporto per determinare il raggio di convergenza:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(n-1)!} \frac{n!}{\Gamma(n+3/2)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\, \Gamma(n+1/2)}{(n+1/2)\, \Gamma(n+1/2)} = 1
\end{aligned}$$

Utilizzando la formula del binomio di Newton, trasliamo ora la serie dal punto $z = 0$ al punto $z = -1$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, (z+1-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (z+1)^k\, (-1)^{n-k}$$

Scambiando l'ordine di somma (ed isolando il termine $k = 0$) otteniamo:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n + \sum_{k=1}^{\infty} (z+1)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^{n-k}$$

Riscalando il secondo indice di somma da n a $n-k$ otteniamo infine:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n + \sum_{k=1}^{\infty} (z+1)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array} \right) (-1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (z+1)^k$$

con

$$\begin{aligned}
b_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, \Gamma(n+1/2) \\
b_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+k-1)!} \frac{(n+k)!}{n!k!}\, \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+k}{n!}\, \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \frac{2k-1}{2^{k+5/2}}
\end{aligned}$$

Utilizziamo di nuovo il criterio del rapporto per trovare il raggio di convergenza:

$$R' = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{b+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{(k+1)!}{k!} \frac{2k-1}{2k+1} \frac{2^{k+\frac{7}{2}}}{2^{k+\frac{5}{2}}} = 2$$

Quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (z+1)^k$$

definisce una funzione analitica nel disco aperto centrato in $z = -1$ di raggio $R' = 2$. D'altra parte questo disco ingloba interamente il disco aperto centrato in $z = 0$ di raggio $R = 1$ che è il dominio di analiticità della serie da cui siamo partiti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, \Gamma(n+1/2)\, z^n$$

L'unico punto di frontiera comune è il punto $z = 1$. Ne segue che tutti i punti sulla frontiera del cerchio di convergenza $|z| = 1$ sono regolari ad eccezione del punto $z = 1$. Poichè sulla frontiera del cerchio di convergenza deve essere presente almeno un punto singolare, ne segue che $z = 1$ è un punto singolare.

C

Esercizio 4 *Trovare lo sviluppo asintotico per grandi x dell'integrale:*

$$I = \int_0^2 dt \, \exp\left[ix \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)\right] \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Estendere il risultato al caso

$$I = \int_0^\infty dt \, \exp\left[ix \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)\right] \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

(4+3 pt)

Calcoliamo il termine dominante; si tratta di un integrale di tipo Fourier con una fase non monotona e il termine dominante si ottiene con il metodo della fase stazionaria: dato un punto critico t_0 il suo contributo al termine dominante è:

$$I_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{|x\phi''(t_0)|}} e^{ix\phi(t_0)} f(t_0) e^{i\frac{\pi}{4} sgn(x\phi''(t_0}} \tag{1}$$

dove nel caso in esame si ha:

$$\phi(t) = \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right) \quad f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Esaminiamo le derivate della fase:

$$\phi' = \pi \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

$$\phi'' = \frac{\pi^2}{2}\left[\cos^2\left(\frac{t\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t\pi}{2}\right)\right]$$

I punti critici sono

$$t_0 = 0 \ \ t_1 = 1 \ \ t_2 = 2$$

Usando la formula (1) il termine dominante è dato da:

$$\frac{1}{2}I_0 + I_1 + \frac{1}{2}I_2$$

dove i fattori $\frac{1}{2}$ tengono conto dei punti che si trovano sulla frontiera. Si ha:

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\pi|x|}} e^{i\frac{\pi}{4} sgnx}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\pi|x|}} e^{ix} e^{i\frac{\pi}{4} sgn(-x)}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\pi|x|}} \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4} sgnx}$$

dove si è usata la proprietà

$$sgn(kx) = sgn(x) \quad k > 0 \quad sgn(kx) = sgn(-x) = -sgn(x) \;\; k < 0$$

Sommando si ottiene:

$$I_{dom} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\pi|x|}}\left(\frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{4}sgnx} + e^{i(x-\frac{\pi}{4}sgnx)}\right)$$

L'integrale di partenza ammette allora uno sviluppo asintotico di tipo

$$I = I_{dom}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Cosa succede se il dominio di integrazione diviene la semiretta positiva ? Adesso abbiamo infiniti punti critici: l'origine, che continua a pesare $\frac{1}{2}$ in quanto punto di frontiera più tutti gli interi positivi per i quali si ha ($k = 1, 2, ...$):

$$\phi(2k-1) = 1 \quad \phi''(2k-1) = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$\phi(2k) = 0 \quad \phi''(2k) = \frac{\pi^2}{2}$$

Quindi:

$$I_{2k-1} = \sqrt{\frac{4}{\pi|x|}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} e^{i(x-\frac{\pi}{4}sgnx)}$$

$$I_{2k} = \sqrt{\frac{4}{\pi|x|}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} e^{i(\frac{\pi}{4}sgnx)}$$

Il risultato finale sarà allora:

$$\frac{1}{2}I_0 + \Sigma_{k=1}^{\infty} I_{2k-1} + \Sigma_{k=1}^{\infty} I_{2k}$$

Usando le proprietà della serie geometrica per sommare le serie che compaiono nel nostro calcolo si ha:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = -1 + \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3}$$

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = 2\Sigma_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{2}{3}$$

Il risultato finale è allora:

$$I_{dom} = \sqrt{\frac{4}{\pi|x|}}\left[\frac{5}{6}e^{i(\frac{\pi}{4}sgnx)} + \frac{2}{3}e^{i(x-\frac{\pi}{4}sgnx)}\right]$$

Esercizio 5 *Trovare lo sviluppo asintotico per $x \to +\infty$ dell'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dy\, e^{-xy} \frac{y^2}{1+y^3}$$

Determinare, per x fissato, il numero di termini dello sviluppo che rendono minima la stima dell'errore.

(10 pt)

L'integrale in esame è la trasformata di Laplace di una funzione razionale; il metodo migliore per ottenerne lo svuluppo asintotico è considerare l'espansione in serie di potenze della funzione razionale $\frac{y^2}{1+y^3}$; il fattore $\frac{1}{1+y^3}$ è immediatamente sviluppabile in una serie geometrica di ragione y^3 e il fattore y^2 viene 'inglobato' in tale serie (una potenza per una serie di potenze dà ancora una serie di potenze !)

$$\frac{y^2}{1+y^3} = y^2 \Sigma_{n=0}^\infty (-y^3)^n = \Sigma_{n=0}^\infty (-1)^n y^{3n+2}$$

Questa serie converge in un dominio limitato, più piccolo del dominio di integrazione, dunque lo sviluppo asintotico dell'integrale I darà luogo a una serie divergente: allora è necessaro troncare lo sviluppo a un dato ordine p e considerare il conseguente resto. Si ha:

$$\Sigma_{n=0}^p (-y^3)^n = \frac{1-(-y^3)^{p+1}}{1+y^3}$$

$$\frac{y^2}{1+y^3} = \Sigma_{n=0}^p (-1)^n y^{3n+2} - \frac{(-1)^p y^{3p+5}}{1+y^3}$$

Inserendo questa espressione nell'integrale, il primo termine dà lo sviluppo asintotico I_p all'ordine p, il secondo termine fornisce il resto R_p.

$$I_p = \int_0^\infty dy\, e^{-xy} \Sigma_{n=0}^p (-1)^n y^{3n+2} = \Sigma_{n=0}^p (-1)^n \frac{1}{x^{3n+3}} \int_0^\infty du\, e^{-u} u^{3n+2} = \Sigma_{n=0}^p (-1)^n \frac{(3n+2)!}{x^{3n+3}}$$

$$|R_p| = |\int_0^\infty dy\, e^{-xy} - \frac{(-1)^p y^{3p+5}}{1+y^3}| \leq \int_0^\infty dy\, e^{-xy} y^{3p+5} = \frac{(3p+5)!}{x^{3p+6}}$$

Assumiamo allora come stima dell'errore che commettiamo approssimando $I \simeq I_p$

$$E_p = \frac{(3p+5)!}{x^{3p+6}}$$

Quando tale stima è minima ? Calcolando $E_{p+1} = \frac{(3p+8)!}{x^{3p+9}}$ si ha:

$$\frac{E_{p+1}}{E_p} = \frac{(3p+8)(3p+7)(3p+6)}{x^3} = \alpha_p$$

Il rapporto α_p è giustamente divergente in p; quando tale rapporto è maggiore dell'unità ogni termine E_p è maggiore del precedente dunque la stima è peggiore; la stima migliore si ha allora prendendo l'ordine p più alto tra quelli che rendono minore dell'unità il rapporto α_p. Detto $\tilde{p}$ il valore cercato:

$$\tilde{p} = max(p \in A) \quad A : p\ \ t/c\ \ \alpha_p < 1$$

Esercizio 6 *Indichiamo con p la probabilità che, in un dato organismo, un nucleotide venga mutato a seguito di una divisione cellulare. Consideriamo un gene composto da N nucleotidi, trovare la probabilità P che dopo una divisione cellulare nel gene si verifichi almeno una mutazione. Determinare il primo termine a_1 dello sviluppo asintotico di P per $p \to 0$ e dare una stima R del resto usando la minorazione*

$$\left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) \leq N^k$$

Calcolare a_1 e R quando $N = 1000$ e $p = 10^{-6}$.

(10pt)

La probabilità che un singolo nucleotide non muti è $1 - p$, quindi la probabilità che nessuno degli N nucleotidi subisca una mutazione è $(1-p)^N$. La probabilità che avvenga almeno una mutazione è complementare a quella che nessun nucleotide muti:

$$P = 1 - (1-p)^N$$

Per determinare il primo termine dello sviluppo uso la formula del binomio di Newton:

$$P = 1 - (1-p)^N = 1 - \sum_{k=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (-p)^k = Np + \sum_{k=2}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (-p)^k$$

Il primo termine dello sviluppo è quindi $a_1 = Np$ ed il resto è dato da

$$R = \sum_{k=2}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (-p)^k$$

Stimiamo il resto:

$$|R| = \left| \sum_{k=2}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (-p)^k \right| \leq \sum_{k=2}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (p)^k \leq \sum_{k=2}^{N} (Np)^k =$$

$$= -1 - Np + \sum_{k=0}^{N} (Np)^k = -1 - Np + \frac{1 - (Np)^{N+1}}{1 - Np} = \frac{(Np)^2 - (Np)^{N+1}}{1 - Np} < \frac{(Np)^2}{1 - Np}$$

Se sostituiamo in queste formule $p = 10^{-6}$, $N = 10^3$ otteniamo:

$$a_1 = 10^{-3}$$

$$|R| < \frac{10^{-6}}{1 - 10^{-3}} \simeq 10^{-6}$$

Domande per l'orale:

Rispondere a tre delle seguenti domande (non è ammesso l'uso dei libri di testo o degli appunti):

- Dare la definizione di punto di diramazione (o polidromia). Discutere il caso z^α, $\alpha \in [0,1]$.
- Discutere il prolungamento analitico per cerchi.
- Dare la definizione di prolungamento analitico. Discutere il prolungamento analitico della Gamma di Eulero e il suo sviluppo asintotico.
- Data la trasformata di Laplace

  $$\int_0^\infty dt\, e^{-xt}\, f(t)$$

  con $f(t)$ analitica, discutere i criteri di convergenza della serie asintotica che si ottiene per $x \to +\infty$.