Il metodo del punto di sella

1 Integrali di tipo Laplace nel campo complesso

I metodi di Laplace e della fase stazionaria vengono "unificati" e generalizzati dal metodo del punto di sella, che qui discuteremo brevemente, limitandoci a considerare il caso più semplice. L'oggetto del metodo e' la determinazione del comportamento asintotico, per gandi valori del parametro reale λ di un integrale del tipo:

$$I(\lambda) = \int_{\mathcal{C}} dz\, f(z) \exp(\lambda g(z)) \tag{1}$$

dove $\mathcal{C}$ è una curva rettifcabile nel piano complesso, e $f(z), g(z)$ sono analitiche in un dominio $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$.

L'idea di base è di *deformare il contorno* (senza cambiare il valore dell'integrale!) in modo da farlo passare per uin punto, z_0, tale che la maggior parte del contributo a $I(\lambda)$ provenga da un "piccolo intorno" del punto stesso, e ci si possa ricondurre cosi ad una analisi locale. Osserviamo che i naturali candidati sono i punti z_0 in cui $\phi'(z_0) = 0$. Naturalmente, oltre al punto, dobbiamo ora specificare una direzione: nell'intorno di z_0 il cammino d'integrazione deformato , diciamo $\mathcal{C}'$ sara' allora ben definito. Mettiamoci nel caso piu' semplice, quello in cui z_0 è uno zero del I ordine di $\phi(z)$ (cioe' $\phi''(z_0) \neq 0$). Allora z_0 è necessariamente un punto di sella per $\phi(z)$, o se si vuole per $u = \Re\phi$ e $v = \Im\phi$.

- **Funzioni armoniche e punti di sella**

  Sia $u\ (x, y)$ uan funzione armonica, le cui derivate parziali prime si annullano in (x_0, y_0); allora, in un intorno di (x_0, y_0):

  $$u(x,y) - u(x_0,y_0) \sim 1/2[u_{xx}(x-x_0)^2 + 2u_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + u_{yy}(y-y_0)^2]$$

  o, in altri termini:

  $$\delta u \sim < \vec{r}, H\vec{r} >$$

  dove

  $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$
  $$H = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}$$

  H è una matrice reale e simmetrica ($u_{xy} = u_{yx}$) con determinante negativo:

  $$detH = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}u_{yx} = -(u_{xx}^2 + u_{xy}^2) < 0$$

Quindi ha autovalori di segno opposto, $h_+ > 0,\ h_- < 0$; indicando con $\vec{v}_+, \vec{v}_-$ i corrispondenti autovettori normalizzati, tra loro ortogonali, e scrivendo $\vec{r} = r_+\vec{v}_+ + r_-\vec{v}_-$, risulta:

$$< \vec{r}, H\vec{r} >= h_+|r_+|^2 \ + \ h_-|r_-|^2 \tag{3}$$

L'espressione (3) è quindi *massima* quando $\vec{r} \parallel \vec{v}_+$ e *minima* per $\vec{r} \parallel \vec{v}_-$. Quindi (x_0, y_0) è un punto di sella per $u(x, y)$.

Nel caso in cui u e v siano la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica, sappiamo poi che le linee "equipotenziali" $u = cost$ e $v = cost$ formano delle reti ortogonali, o, se si vuole in ogni punto $\nabla u \perp \nabla v$. Le linee $v = cost(u = cost)$ sono parallele a $\nabla u(\nabla v)$, e quindi danno le direzioni di massima variazione di $u(v)$. Per valutare il comportamnto asintotico di $I(\lambda)$ scegliamo i cammini $v = cost$ (massima variazione di u), perche su quelle curve $|\exp(\lambda\phi)|$ ha un andamento gaussiano nell'intorno di z_0, mentre sulle curve otogonali $\exp(\lambda\phi)$ ha nello stesso intorno un andamento oscillante, e il meccanismo di cancellazione dovuto alle rapide oscillazioni è meno efficace di quello associato ad una decrescita di tipo gaussiano. rimane a questo punto solo la scelta tra le curve (i) *di piu' ripida discesa* (*steepest descent*) e le curve (ii) *di piu' ripida ascesa* (*steepest ascent*) di u. E' ovvio che il contributo dato all'integrale da un piccolo intorno di z_0 sarà quello delle curve di tipo (i). Per questo il metodo del punto di sella viene anche chiamato "metodo della piu' ripida discesa".

Per una più chiara caratterizzazione di ciò che accade in prossimità del punto di sella, usiamo coordinate polari.
Si ha, ponendo $z - z_0 = \rho \exp(i\theta)$, $\phi''(z_0) = a \exp(i\alpha)$,

$$\phi(z) \ - \phi(z_0) \sim 1/2\rho^2 a \exp(2i\theta + \alpha) = 1/2\rho^2 a[\cos(\alpha + 2\theta) + i \sin(\alpha + 2\theta)]$$

Le curve $v = cost$ sono quindi quelle definite dalla condizione $\sin(\alpha + 2\theta) = 0$, cioè $\theta_k = -\alpha/2 + k\pi/2$. Per $k = 0, 2$ si ha $\cos(\alpha + 2\theta) = 1$, mentre per $k = 1, 3$ si ha $\cos(\alpha + 2\theta) = -1$. Quindi θ_1, θ_3 indicano la direzione "di più ripida discesa" (minimo di u in z_0), mentre θ_0, θ_2 quelle di più ripida ascesa" (massimo di u in z_0). Scegliendo, per le ragioni spiegate sopra, la più ripida discesa , e assumendo (ovviamente) l'integrabilità di $f(z)$ nell'intorno di z_0:

$$f(z) \sim f_0(z - z_0)^{(\beta-1)}; \ \ \Re\beta \ > \ 0$$

si ha il risultato

$$I(\lambda) \sim f_0 \exp(\lambda\phi(z_0)) \exp(i\beta\theta_1)(\frac{2}{\lambda a})^{\beta/2}\Gamma(\beta/2) \tag{4}$$

Si noti che per $\beta = 1$ (cioè $f(z)$ regolare in z_0: $f_0 = f(z_0)$ si ha:

$$I(\lambda) \sim f_0 \exp(\lambda\phi(z_0)) \exp(i\theta_1)(\frac{2\pi}{\lambda a})^{1/2} \tag{5}$$

che è una naturale generalizzazione della formula di Laplace. L'espressione (4) si ottiene con una tecnica analoga a quella che si usa per derivare la formula di Laplace sull'asse reale. Si osserva anzitutto che:

$$\phi(z) \sim \phi(z_0) - \frac{\rho^2 a}{2}$$

mentre:

$$f(z) \sim f_0 \rho^{\beta-1} \exp[i(\beta-1)\theta_1]$$

Inoltre, lungo la "steepest descent" $\mathcal{C}'$, si ha $dz = d\rho \exp(i\theta_1)$, e l'integrale su ρ può essere esteso da 0 a ∞. Alla formula (4) si arriva quindi facilmente introducendo la nuova variabile $t = \frac{\lambda a \rho^2}{2}$ e ricordando che

$$\int_0^\infty dt t^{\beta/2-1} e^{-t} = \Gamma(\beta/2)$$