

Operatori di contrazione ed equazioni integrali

1 Contrazioni

Ricordiamo che, dato uno spazio metrico M , un'applicazione:

$$x \rightarrow x' = Ax; \quad (x, x' \in M)$$

è una contrazione se “accorcia” le distanze tra i punti:

$$d(x'_1, x'_2) \leq \alpha d(x_1, x_2); \quad \alpha < 1$$

Valgono le seguenti proprietà:

- La successione $\{x^{(n)}\}$ è di Cauchy; quindi, se M è completo, essa converge ad un elemento x^* di M .
- x^* è soluzione dell'equazione del punto fisso: $x^* = Ax^*$; infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax^{(n)} =$ (*continuità*) $Ax^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = x^*$.
- x^* è l'unico punto fisso di A : sia infatti y un altro punto fisso, $y = Ay$. Segue $d(x^*, y) = d(Ax^*, Ay) \leq \alpha d(x^*, y)$, cioè: $(1 - \alpha)d(x^*, y) \leq 0$, che implica $d(x^*, y) = 0$, ovvero $x = y$.

1.1 Applicazioni: mappe unidimensionali

Come semplice applicazione del teorema delle contrazioni, consideriamo il caso di una mappa unidimensionale, cioè di una applicazione (di un insieme misurabile) dell'asse reale in se stesso:

$$x \rightarrow x' = f(x); \quad (x, x' \in \mathbb{R}); \quad d(x_1, x_2) := |x_1 - x_2|$$

Il grafico della mappa è la successione delle iterate di un certo punto iniziale $x^{(0)}$:

$$x^{(1)} = f(x^{(0)}), \dots, x^{(n)} = f^n(x^{(0)}) = f(f(\dots(f(x^{(0)}))\dots))$$

Un punto periodico di periodo p della mappa è un punto fisso dell'applicazione iterata p volte, tale quindi che $\tilde{x}^{(p)} = \tilde{x}$. Per $p = 1$ si parla semplicemente di punti fissi della mappa. Se la mappa è una contrazione, essa avrà uno ed un solo punto fisso, “raggiungibile” a partire da qualsiasi punto iniziale. La condizione di contrazione è semplicemente:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \quad \alpha < 1$$

Se f è di classe C^1 , la condizione è soddisfatta in un certo intervallo $[a, b]$ se $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| = M < 1$.

Ad esempio, la mappa logistica :

$$x \rightarrow x' = f(x) = \mu x(1 - x)$$

è una contrazione di $[0, 1]$ in sé per $\mu < 1$. In questo caso, l'unico punto fisso (stabile, anzi, asintoticamente stabile) della mappa è l'origine.

2 Equazioni integrali

Partire dal teorema delle contrazioni può essere un approccio interessante alle equazioni integrali (e anche alle equazioni differenziali), per stabilire risultati sull'esistenza e unicità delle soluzioni e sulla convergenza di metodi iterativi. In queste note, ci occuperemo principalmente di equazioni integrali lineari in una variabile. Assumeremo dapprima che il termine noto e la funzione incognita siano funzioni continue sul segmento $[a, b]$, e che il "nucleo integrale" $k(t, s)$ sia una funzione continua sul quadrato di lato $[a, b] \times [a, b]$. Lo spazio metrico in gioco è quindi $C_{[a, b]}$, munito della distanza $d(x_1, x_2) = \max_{t \in [a, b]} |x_1(t) - x_2(t)|$. Successivamente estenderemo le nostre considerazioni al caso dello spazio $L^2_{[a, b]}$ delle funzioni di modulo quadrato integrabile sul segmento $[a, b]$.

2.1 Equazioni di Fredholm

Un'equazione integrale di Fredholm in una variabile appartenente al segmento $[a, b]$ ha la forma:

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^b ds k(t, s)x(s) \quad (1)$$

Se il *terminenoto* $y(t) = 0$, si parla di equazione omogenea, altrimenti (ovviamente) di equazione non omogenea. Formalmente, possiamo scrivere la (1) nel modo seguente:

$$\vec{x} = \vec{y} + \lambda \hat{K} \vec{x} \quad (2)$$

o, equivalentemente:

$$(\hat{I} - \lambda \hat{K}) \vec{x} = \vec{y}$$

dove \vec{x}, \vec{y} sono i vettori di $C_{[a, b]}$ associati alle funzioni $x(t), y(t)$ e \hat{I} è l'operatore identità e \hat{K} è l'operatore integrale il cui "nucleo" è la funzione $k(t, s)$.

Indicando con Ax l'espressione a II membro della (1), si perviene immediatamente alla disequaglianza

$$d(A\vec{x}_1, A\vec{x}_2) \leq |\lambda| M(b-a) d(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

dove \vec{x}_1, \vec{x}_2 sono due elementi arbitrari di $C_{[a, b]}$ e M è il massimo del valore assoluto di $k(t, s)$ sul quadrato. Segue che una condizione *sufficiente* perché A sia una contrazione è che λ sia interno alla circonferenza di raggio $\frac{1}{M(b-a)}$. Se questa condizione è soddisfatta la soluzione è unica e si può trovare con il metodo delle approssimazioni successive, che dà luogo alla cosiddetta serie di Neumann. Scegliendo un punto iniziale arbitrario per l'iterazione, e omettendo per semplicità il simbolo di vettore, si ottiene la successione:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= y + \lambda K x^{(0)} \\ x^{(2)} &= y + \lambda K x^{(1)} = y + \lambda K y + \lambda^2 K^2 x^{(0)}, \dots \end{aligned}$$

Di solito si sceglie come punto di partenza il termine noto, il che porta ad una notevole semplificazione: il termine n -esimo può infatti scriversi nella forma:

$$x^{(n)} = \sum_{l=0}^n (\lambda K)^l y; \quad (K^0 = I) \quad (3)$$

In (3) il simbolo K^n indica l'applicazione dell'operatore lineare K iterata n volte.

- Spesso la serie di Neumann (3) si scrive in termini dei cosiddetti nuclei iterati: si scrive cioè:

$$(K^n x)(t) = \int_a^b ds k^{(n)}(t, s) x(s)$$

dove

$$k^{(n)}(t, s) := \int_a^b ds_1 k(t, s_1) k^{(n-1)}(s_1, s); \quad n = 2, \dots; \quad k^{(1)}(t, s) = k(t, s)$$

- La serie operatoriale

$$I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots$$

è l'inverso formale dell'operatore $I - \lambda K$, che converge (si pensi alla serie geometrica) allorché la norma dell'operatore λK è minore di 1. La quantità $M(b-a)$ dà quindi una stima della norma di K .

2.2 Equazioni di Volterra

Un'equazione integrale lineare di Volterra in una variabile appartenente al segmento $[a, b]$ è della forma:

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_a^t ds k(t, s) x(s) \quad (4)$$

oppure

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_t^b ds k(t, s) x(s) \quad (5)$$

Questo significa che il nucleo $k(t, s)$ è "triangolare" ovvero si annulla in uno dei due triangoli in cui il quadrato di lato ab nel piano (t, s) è diviso dalla bisettrice del I e III quadrante ($t = s$).

A differenza delle equazioni di Fredholm, nel caso di Volterra la serie di Neumann converge sempre, in virtù della natura triangolare del nucleo. Prendiamo come esempio il caso (4). Per capirne il motivo, indicando sempre con A l'operatore a II membro della (4), e con z_1 e z_2 due elementi arbitrari di $C_{[a,b]}$, consideriamo le differenze:

$$Az_1 - Az_2 = \lambda K(z_1 - z_2)$$

$$A^2 z_1 - A^2 z_2 = \lambda^2 K^2(z_1 - z_2)$$

$$A^n z_1 - A^n z_2 = \lambda^n K^n(z_1 - z_2), \dots$$

ottenendo:

$$|Az_1 - Az_2| \leq |\lambda|(t-a)Md(z_1, z_2)$$

$$|A^2 z_1 - A^2 z_2| \leq |\lambda|^2 M^2 d(z_1, z_2) \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds = |\lambda|^2 M^2 d(z_1, z_2)(t-a)^2/2$$

$$|A^n z_1 - A^n z_2| \leq |\lambda|^n M^n d(z_1, z_2) \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \dots \int_a^{s_{n-1}} ds = |\lambda|^n M^n d(z_1, z_2)(t-a)^n/n!$$

Abbiamo perciò:

$$d(A^n z_1, A^n z_2) \leq \frac{(|\lambda|M(b-a))^n}{n!} d(z_1, z_2) \quad (6)$$

Se n è abbastanza grande, il coefficiente $(|\lambda|M(b-a))^n/n!$ è chiaramente minore di 1, quale che sia il valore di λ : cioè l'operatore A^n è una contrazione, e quindi esiste una e una sola funzione x^* tale che $x^* = A^n x^*$. Ma x^* è anche (l'unico) punto fisso di A , vale a dire l'unica soluzione dell'equazione integrale (4). Infatti $x^* = A^n x^* \rightarrow Ax^* = AA^n x^* = A^n Ax^*$. Vale a dire Ax^* è anch'esso punto fisso di A^n : ma A^n ha un unico punto fisso, e quindi deve essere $Ax^* = x^*$, ovvero l'equazione integrale (4) ammette sempre una e una sola soluzione (per di più ottenibile per approssimazioni successive). In particolare, un'equazione di Volterra *omogenea* ammette solo la soluzione nulla.

2.3 Equazioni di Fredholm su spazi di Hilbert

Le precedenti considerazioni possono estendersi, con alcune significative modifiche, al caso in cui lo spazio delle funzioni su cui è definita l'equazione integrale non sia $C_{[a,b]}$, che è uno spazio normato (completo, cioè uno spazio di Banach), ma, ad esempio, $L^2_{[a,b]}$, lo spazio delle funzioni di modulo quadrato integrabile sul segmento $[a, b]$, che può anche essere una semiretta ($a = -\infty$ oppure $b = +\infty$) oppure l'intera retta reale ($a = -\infty$; $b = +\infty$); questo spazio ha una struttura in più, essendo uno spazio euclideo, anzi uno spazio di Hilbert, cioè uno **spazio euclideo infinito-dimensionale separabile e completo**, (purché l'integrale sia inteso nel senso di Lebesgue). Le funzioni vanno riguardate come vettori in questo spazio, il prodotto scalare si indica con (\cdot, \cdot) o con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ed è definito nel modo seguente:

$$(f, g) := \int_a^b \bar{f}(t)g(t) \quad (7)$$

Conseguentemente, e analogamente a quanto accade negli spazi euclidei finito-dimensionali, si definisce *aggiunto* o *hermitianoconiugato* di un operatore lineare A da L^2 in se stesso, l'operatore lineare A^\dagger , definito dalla relazione:

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g) \quad \forall f, g \in L^2 \quad (8)$$

Si può dimostrare facilmente che, dalla definizione (8) segue che l'operatore K^\dagger è l'operatore integrale con nucleo $k^\dagger(t, s) := \bar{k}(s, t)$.

In L^2 , la condizione di continuità, e quindi di limitatezza, del nucleo integrale, è sostituita dalla seguente condizione di integrabilità:

$$k_2 := \int_a^b dt \int_a^b ds |k(t, s)|^2 < \infty \quad (9)$$

Si può mostrare infatti che, se (9) è soddisfatta, l'operatore integrale K è limitato. Si parla allora di "nuclei L_2 ", o, più correttamente, di nuclei di Hilbert-Schmidt (HS).

Definizione

Un operatore A su uno spazio di Hilbert H si dice limitato (o continuo) se esiste una costante positiva C (detta **norma** di A) tale che, $\forall f \in H$, si abbia :

$$\| Af \| \leq C \| f \|$$

$\| f \|$ essendo ovviamente data da $(f, f)^{\frac{1}{2}}$.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si può dimostrare che, per operatori HS, $\| K \| = k_2^{\frac{1}{2}}$.

Nel caso delle equazioni di Volterra, vale ancora l'esistenza e unicità della soluzione. Nel caso delle equazioni di Fredholm, possiamo dire qualcosa di più, rispetto al caso trattato in precedenza.

- Usando il teorema delle contrazioni, si può dimostrare che condizione sufficiente affinché esista un'unica soluzione dell'equazione di Fredholm (1) è che valga la disuguaglianza $\lambda k_2 < 1$.
- In generale, vale il teorema di HS:

Teorema di Hilbert Schmidt 1 *Un operatore integrale HS ammette una successione di autovalori $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k_1 = \|k\|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$ la cui molteplicità algebrica è pari alla molteplicità geometrica. Se per di più K è un operatore **normale**, cioè commuta con il suo aggiunto ($[K, K^\dagger] = 0$), in particolare, è **autoaggiunto o hermitiano**, i suoi autovettori $e^{(n)}$ (con l'aggiunta del Ker) formano una base ortogonale per L^2 , e $\forall f \in L^2$ vale la formula:*

$$Kf = \sum_{n=1}^{\infty} k_n (e^{(n)}, f) e^{(n)} \quad (10)$$

o, in notazione di Dirac:

$$K|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} k_n |e^{(n)}\rangle \langle e^{(n)}|f\rangle \quad (11)$$

- Se K è un operatore integrale HS, vale anche il cosiddetto Teorema dell'alternativa di Fredholm:

Teorema dell'alternativa 1 Data l'equazione integrale (1), si hanno due casi:

1) $k = \lambda^{-1}$ non è autovalore dell'operatore K : l'equazione omogenea ammette solo la soluzione nulla \Leftrightarrow l'equazione non omogenea ammette una e una sola soluzione;

2) $k = \lambda^{-1}$ è autovalore dell'operatore K : l'equazione omogenea ammette soluzioni non banali (le autosoluzioni dell'equazione) \Leftrightarrow l'equazione non omogenea ammette soluzioni se e solo se il termine noto è ortogonale (in L^2) alle soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta; deve cioè essere $(y, z) = 0$, per ogni z soluzione dell'equazione omogenea:

$$\int_a^b ds \bar{k}(s, t) z(s) = \bar{k}z(t)$$

2.4 Equazioni di Fredholm con nucleo degenere

Esiste un caso particolare, ma importante, in cui la soluzione delle equazioni integrali si riduce alla soluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari; è il caso delle equazioni con nucleo *degenere* o *separabile*, cioè della forma:

$$k_r(t, s) = \sum_{n=1}^r f_n(t)g_n(s) \quad (12)$$

Si tratta di un caso importante perché si può dimostrare, e la cosa non è difficile, che ogni nucleo HS è il limite, in L^2 , di una successione di nuclei separabili:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b dt \int_a^b ds |k(t, s) - k_r(t, s)|^2 = 0.$$

Sia data perciò l'equazione integrale:

$$x(t) = y(t) + \int_a^b ds k_r(t, s)y(s) = 0. \quad (13)$$

moltiplicando ambo i membri per una particolare funzione che appare nel nucleo (12), diciamo $g_m(t)$, e integrando su t otteniamo il sistema di equazioni lineari algebriche:

$$x_m = y_m + \lambda \sum_{n=1}^r k_{mn} x_n, \quad (n = 1, \dots, r)$$

dove $x_m = \int_a^b dt g_m(t)x(t)$, $y_m = \int_a^b dt g_m(t)y(t)$, $k_{mn} = \int_a^b dt g_m(t) f_n(t)$.

Definendo i vettori $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$, e la matrice \hat{K} di elementi k_{mn} , la

relazione di sopra assume la forma compatta:

$$(\hat{I} - \lambda \hat{K})\vec{x} = \vec{y}, \quad (14)$$

di un sistema di equazioni algebriche lineari cui possiamo applicare il teorema dell'alternativa nella forma di Rouché-Capelli.

2.5 Equazioni integrali con nuclei di convoluzione e trasformate integrali

Abbiamo già visto come nella teoria dei sistemi lineari la richiesta di causalità e di invarianza del sistema per traslazioni temporali porta naturalmente all'introduzione di nuclei di convoluzione, per di più (per la causalità) triangolari.

Qui ci occuperemo, in generale di equazioni integrali della forma

$$x(t) = y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} ds k(t-s)x(s) \quad (15)$$

$$x(t) = y(t) + \int_0^t ds k(t-s)x(s) \quad (16)$$

Le equazioni di tipo (15) comprendono quelle "causali" che corrispondono al caso particolare in cui $k(t)$ sia identicamente nullo per $t \leq 0$, cioè al caso in cui sia $k(t) = f(t)\theta(t)$, dove $f(t)$ è una funzione (integrabile) qualunque e $\theta(t)$ è la funzione a gradino ($\theta(t) = 1, t > 0; \theta(t) = 0, t \leq 0$).

Tali equazioni si possono "risolvere" (o meglio, ricondurre alle quadrature) per mezzo della trasformata di Fourier, nel caso (15), e della trasformata di Laplace, nel caso (16).

Ricordiamo a questo proposito, brevemente e schematicamente, le principali proprietà delle trasformate di Fourier e di Laplace.

2.5.1 Trasformata di Fourier

Sia $f(t)$ una funzione assolutamente integrabile sulla retta. La sua "trasformata" di Fourier (o "integrale" di Fourier) è definita dalla formula:

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i\omega t) f(t) \quad (17)$$

Si noti che la scelta del segno dell'esponente è arbitraria; in molti testi si usa la convenzione opposta.

Valgono per la trasformata di Fourier le seguenti importanti proprietà:

- **I. Convergenza:** Se una successione di funzioni $\{f_n\}$ converge a f nella norma L^1 (cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| = 0$), la successione delle trasformate $\hat{f}_n(\omega)$ converge a $\hat{f}(\omega)$ *uniformemente*.

Dim. : immediata

- **II. Continuità:** La trasformata di Fourier di una funzione L^1 è una funzione continua di ω .

Dim.: Ogni funzione L^1 è il limite in L^1 di una opportuna successione di funzioni costanti a tratti. La trasformata di Fourier di ogni tale funzione è una funzione continua. In virtù della proprietà I, la successione delle trasformate converge uniformemente. Ma il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni continue è una funzione continua.

- **III. Trasformata della derivata:** Se $\hat{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $f(t)$, la trasformata di Fourier di $f^{(n)}(t)$ (che si suppone appartenente a L^1) è data da $i\omega^n \hat{f}(\omega)$.

Dim. Basta integrare ripetutamente per parti, utilizzando la proprietà che le varie derivate di $f(t)$ si annullano tutte all'infinito.

- **IV. Trasformata di $t^n f(t)$:** Supponiamo che $f(t)$ sia assolutamente integrabile su ogni insieme di misura finita e che si annulli all'infinito più rapidamente di $t^{-(n+1)}$. Allora la trasformata di Fourier di $t^n f(t)$ esiste e vale $(i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f})(\omega)$.

Dim. Si osserva che $t^n \exp(-i\omega t)$ è i^n volte la derivata n -esima rispetto a ω di $\exp(-i\omega t)$. Dopodiché, assumendo la convergenza uniforme dell'integrale, si scambia l'integrale in t con la derivata rispetto a ω , e si arriva al risultato cercato.

- **Traslazioni e riscalamanti della variabile indipendente :** Se $\hat{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $f(t)$, la trasformata di Fourier di $f(t+a)$ è $\exp(i\omega a) \hat{f}(\omega)$. Analogamente, la trasformata di Fourier di $f(\lambda t)$ è $\lambda^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1} \omega)$.

Dim. Entrambe le proprietà si dimostrano con ovvi e banali cambiamenti di variabile.

Dalle proprietà di cui sopra possiamo inferire alcune importanti caratteristiche della trasformata di Fourier. E' chiaro ad esempio che, quanto piu' "localizzata" è la funzione $f(t)$, tanto piu' liscia e regolare è la sua trasformata di Fourier. Ma tutte le proprietà della trasformata di Fourier possono essere "lette al contrario", in virtù della simmetria esistente tra trasformata e antitrasformata.

Valgono in proposito i seguenti teoremi:

Teorema dell'antitrasformata 1 *Se $f(t)$ è assolutamente integrabile sulla retta e se $\forall \tau$ il rapporto incrementale $(f(t) - f(\tau))/(t - \tau)$ è assolutamente integrabile in $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$ per ogni δ finito, allora vale la formula dell'antitrasformata:*

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) \quad (18)$$

Dim. Scriviamo $\int_{-\infty}^{+\infty}$ come $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$. Sostituiamo a $\hat{f}(\omega)$ la sua definizione (17), chiamando in quella formula la variabile di integrazione τ , per evitare confusione. Scambiamo poi l'ordine d'integrazione. L'integrale $\int_{-N}^N d\omega \exp(i\omega(t - \tau))$

τ) si può calcolare esattamente e vale $\frac{2\sin(N(t-\tau))}{t-\tau}$. Otteniamo quindi:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin(N(t-\tau))}{t-\tau} f(t)$$

Ricordiamo ora che vale la formula $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin(N(t-\tau))}{t-\tau} = 1$, per cui in definitiva dobbiamo mostrare che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin(N(t-\tau))}{t-\tau} (f(t) - f(\tau)) = 0.$$

La dimostrazione, come molte altre di questo genere, si fa “dividendo” la retta d’integrazione in due parti, una limitata $[-\delta, \delta]$, e una illimitata $|\tau| > \delta$. Nel limite $N \rightarrow \infty$ la parte limitata va a zero, perché l’ipotesi sull’assoluta integrabilità del rapporto incrementale ci permette di applicare il lemma di Riemann-Lebesgue. La parte non limitata è al più $O(1/N)$, per la sommabilità della funzione integranda. Di conseguenza il teorema è dimostrato.

Per la relazione tra Trasformata e Antitrasformata nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, vale l’importante Teorema di Fourier-Plancherel.

Teorema di Fourier-Plancherel 1 Sia $f(t)$ una funzione $\in L^2(\mathbb{R})$. Allora lo è anche la sua antitrasformata. Si ha inoltre “convergenza in media quadratica”:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t) - f_N(t)|^2 = 0 \quad (19)$$

dove abbiamo posto

$$f_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N d\omega \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega),$$

e “conservazione della norma”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\hat{f}(\omega)|^2 \quad (20)$$