Equazioni differenziali lineari del II ordine con termine noto “transiente”: comportamento asintotico per $x \to \pm\infty$

Consideriamo un’equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea:

$$f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = g(x) \tag{1}$$

Siamo interessati al caso in cui il termine noto si annulla in maniera “sufficientemente rapida” per $x \to \pm\infty$. Il significato dell’espressione fra virgolette sarà chiaro nel seguito.

Supponiamo che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ siano due soluzioni indipendenti (cioè non proporzionali) dell’equazione omogenea associata all’equazione (1):

$$f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = 0$$

L’indipendenza di due soluzioni è valutabile attraverso $W[f_1, f_2]$, il determinante della matrice “wronksiana” (detto semplicemente “wronksiano”):

$$W(x) = \det M(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} =$$

$$= f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x)$$

Osserviamo che $W(x)$ soddisfa un’equazione differenziale del I ordine. Infatti, derivando:

$$W' = f_1 f_2'' - f_1'' f_2 = f_1[-a_1 f_2' - a_2 f_2] - f_2[-a_1 f_1' - a_2 f_1] = -a_1 W$$

Da cui:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} dx' a_1(x')\right)$$

quindi:

$$\text{se} \qquad W(x_0) \neq 0, \qquad W(x) \neq 0 \qquad \forall x!$$

Con queste premesse, cerchiamo la soluzione generale di (1) con il metodo della “variazione delle costanti arbitrarie”: cerchiamo cioè la soluzione $f(x)$ nella forma:

$$f(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$$

Derivando:

$$f'(x) = c_1'(x)f_1(x) + c_2'(x)f_2(x) + c_1(x)f_1'(x) + c_2(x)f_2'(x) \tag{2}$$

Imponiamo a $c_1(x)$ e $c_2(x)$ di soddisfare l’equazione differenziale:

$$(a) \qquad c_1'(x)f_1(x) + c_2'(x)f_2(x) = 0$$

(imposizione "arbitraria" ma "legittima" perché per determinare c_1 e c_2 a meno di costanti abbiamo bisogno di *due* equazioni algebriche lineari per le derivate c_1' e c_2').

La seconda condizione su c_1' e c_2' proviene dalla richiesta che $f(x)$ sia soluzione dell'equazione (1).

Derivando (2), tenendo conto di (a), otteniamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= c_1(x)f_1''(x) + c_2(x)f_2''(x) + c_1'(x)f_1'(x) + c_2'(x)f_2'(x) = \\ &= c_1(x)[-a_1(x)f_1'(x) - a_2(x)f_1(x)] + c_2(x)[-a_1(x)f_2'(x) - a_2(x)f_2(x)] + \\ &\quad +c_1'(x)f_1'(x) + c_2'(x)f_2'(x) = \\ &= -a_1(x)[c_1(x)f_1'(x) + c_2(x)f_2'(x)] - a_2(x)[c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)] + \\ &\quad +c_1'(x)f_1'(x) + c_2'(x)f_2'(x) \end{aligned} \tag{3}$$

D'altra parte, affinché $f(x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale non omogenea (1) deve risultare:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -a_1(x)[c_1(x)f_1'(x) + c_2(x)f_2'(x)] - a_2(x)[c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)] \\ &\quad +g(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Confrontando (3) e (4) otteniamo la relazione:

$$(b) \qquad c_1'(x)f_1'(x) + c_2'(x)f_2'(x) = g(x)$$

La soluzione del sistema $(a) + (b)$ è data da:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ g & f_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}} = -\frac{g(x)f_2(x)}{W[f_1, f_2]};$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}} = \frac{g(x)f_1(x)}{W[f_1, f_2]};$$

Quindi:

$$c_1(x) = c_1(\text{cost.}) - \int_{x_0}^{x} dy \frac{g(y)f_2(y)}{W(y)}$$

$$c_2(x) = c_2(\text{cost.}) + \int_{x_0}^{x} dy \frac{g(y)f_1(y)}{W(y)}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale (1) ha quindi la forma:

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \int_{x_0}^{x} dy\, g(y) \frac{[f_2(x)f_1(y) - f_1(x)f_2(y)]}{W[y]}$$

Il termine $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$ dà la soluzione generale dell'omogenea mentre quello contenente l'integrale dà una soluzione particolare della non-omogenea.

Per problemi sull'intera retta reale, in cui le condizioni al contorno sono assegnate a $-\infty$ e a $+\infty$, conviene porre $x_0 = -\infty$, e naturalmente occorre richiedere l'integrabilità sull'intera retta delle funzioni $\frac{g(y)f_1(y)}{W(y)}$ e $\frac{g(y)f_2(y)}{W(y)}$:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_1(y)}{W(y)} < \infty; \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_2(y)}{W(y)} < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Le condizioni (5) dipendono sia dalle soluzioni dell'omogenea f_1 e f_2, sia dal termine noto: possiamo dire che se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono limitate, $g(x)$ deve annullarsi più rapidamente di $1/|x|$ per $|x| \to \infty$, etc.

Siamo ora in grado di caratterizzare completamente il termine dominante del comportamento asintotico della generica soluzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$.

Infatti, per $x \to -\infty$ abbiamo:

$$f(x) \sim c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \stackrel{\text{def.}}{=} c_1^{(-)} f_1(x) + c_2^{(-)} f_2(x)$$

Mentre, per $x \to +\infty$, abbiamo:

$$\begin{gathered} f(x) \sim f_1(x)[c_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_2(y)}{W(y)}] + f_2(x)[c_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_1(y)}{W(y)}] = \\ \stackrel{\text{def.}}{=} c_1^{(+)} f_1(x) + c_2^{(+)} f_2(x) \\ \Updownarrow \\ c_1^{(+)} = c_1^{(-)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_2(y)}{W(y)} \\ c_2^{(+)} = c_2^{(-)} + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)f_1(y)}{W(y)} \end{gathered}$$

Si noti che per scrivere le formule precedenti abbiamo usato la proprietà:

$$f(x) \int_a^x dy\, h(y) \sim f(x) \int_a^{+\infty} dy\, h(y) \qquad x \to +\infty$$

valida non appena $h(x)$ è integrabile, infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) \int_a^x dy\, h(y)}{f(x) \int_a^{+\infty} dy\, h(y)} = 1$$

L'esempio più semplice, ma anche uno dei più importanti, è quello in cui le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ hanno un andamento oscillante, e l'equazione differenziale da risolvere è semplicemente:

$$f''(x) + k^2 f(x) = g(x)$$

$$f_1(x) = \sin(kx) \qquad f_2(x) = \cos(kx)$$
$$W[f_1, f_2] = -k$$

Per $x \to +\infty$:

$$f(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{g(y)}{k} \sin[k(x-y)] =$$
$$= c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy G(x-y;k) g(y)$$

con

$$G(x;k) = \frac{\sin(kx)}{k}$$

In generale potremo scrivere:

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dy G(x;y) g(y)$$

con

$$G(x;y) = \frac{f_2(x) f_1(y) - f_1(x) f_2(y)}{W(y)}$$

Esempi:

E1: Determinare c_1^+, c_2^+ per l'equazione differenziale:

$$f''(x) + k^2 f(x) = \theta(a^2 - x^2)$$

dove

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sapendo che $f(x) \sim \cos(kx)$ per $x \to -\infty$.

Soluzione: Abbiamo perciò, nelle nostre notazioni, $c_1^{(-)} = 0$, $c_2^{(-)} = 1$. Di conseguenza:

$$c_1^{(+)} = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cos(ky)\, \theta(a^2 - y^2)$$
$$c_2^{(+)} = 1 - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sin(ky)\, \theta(a^2 - y^2)$$

Quindi:

$$c_1^{(+)} = \frac{1}{k} \int_{-a}^{+a} dy \cos(ky) = \frac{2}{k^2} \sin(ka)$$
$$c_2^{(+)} = 1$$

In definitiva, l'andamento asintotico della soluzione a $+\infty$ è dato da:

$$f(x) \sim \frac{2}{k^2} \sin(ka) \sin(kx) + \cos(kx)$$

E2: Come sopra, ma il termine noto è:

$$
\begin{array}{lll}
E2a: & \text{una gaussiana:} & g(x) = g\exp(-hx^2) \\
E2b: & \text{una lorentziana:} & g(x) = \frac{g}{x^2+\gamma^2}
\end{array}
$$

Dobbiamo perciò calcolare gli integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(kx) g(x); \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sin(kx) g(x)$$

Poiché $g(x)$ è pari, l'integrale di $\sin(kx)g(x)$ è nullo. Rimangono perciò da calcolare gli integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(kx) e^{-hx^2}; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(kx) \frac{1}{x^2+\gamma^2}$$

Ovviamente, possiamo sostituirli con gli integrali di Fourier:

$$I_G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx-hx^2}; \qquad I_L(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2+\gamma^2}$$

che sappiamo fare. In dettaglio:

$$I_G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(\sqrt{h}x-\frac{ik}{2\sqrt{h}})^2-\frac{k^2}{4h}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4h}}}{\sqrt{h}} \int_{-\infty-\frac{ik}{2\sqrt{h}}}^{+\infty-\frac{ik}{2\sqrt{h}}} dy\, e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{h}} e^{-\frac{k^2}{4h}}$$

$$I_L(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2+\gamma^2} = \begin{cases} \frac{2\pi i e^{-k}}{2i\gamma} = \frac{\pi}{\gamma} e^{-k} & \text{se } k > 0 \\ \frac{-2\pi i e^{k}}{-2i\gamma} = \frac{\pi}{\gamma} e^{k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

In generale:

$$I_L(k) = \frac{\pi}{\gamma} e^{-|k|}$$