Introduzione euristica alla “δ” di Dirac e alle sue collegate.

1 L’antitrasformata di Fourier

Se definiamo la trasformata di Fourier di una funzione assolutamente integrabile sulla retta reale con la formula:

$$\hat{f}(k) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x), \tag{1}$$

la corrispondente definizione di antitrasformata è:

$$f(x) \;=\; (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \hat{f}(k), \tag{2}$$

ovvero:

$$f(x) \;=\; (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-iky} f(y). \tag{3}$$

Uno scambio puro e semplice dell’ordine di integrazione porge:

$$f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \frac{e^{ik(x-y)}}{2\pi}, \tag{4}$$

e l’integrale su k non é ovviamente convergente, almeno nel senso delle funzioni ordinarie.

Se però interpretiamo la (4) nel senso seguente:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \int_{-N}^{N} dk\, \frac{e^{ik(x-y)}}{2\pi} \;= \qquad (5)\\ &=\; \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, \frac{\sin[N(x-y)]}{\pi(x-y)}, \end{aligned}$$

ricordando la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{\sin t}{t} \;=\; \pi,$$

abbiamo:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, [f(x)-f(y)]\, \frac{\sin[N(x-y)]}{\pi(x-y)} \;=\; 0, \tag{6}$$

che vale sotto le seguenti condizioni:

- Assoluta integrabilità del rapporto incrementale $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|$ su ogni sottoinsieme di misura finita della retta reale (la cosiddetta “condizione del Dini”).
- Assoluta integrabilità della funzione $f(x)$.

In definitiva, se $f(x)$ soddisfa queste due condizioni, vale la formula:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y)\, \frac{\sin[N(x-y)]}{\pi(x-y)} \;=\; f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx}\, \hat{f}(k).$$

La successione di funzioni $\frac{\sin Nx}{\pi x}$ definisce perciò un *funzionale lineare continuo*, noto come "funzione δ" di Dirac.

In termini astratti, la "δ" di Dirac è quindi una mappa continua da un certo spazio funzionale $\mathcal{S}$ (detto spazio di funzioni di prova) all'insieme dei numeri reali $\mathcal{R}$ che possiamo definire come segue:

$$\delta_{x_0}(f) \;=\; f(x_0) \qquad\qquad \forall f \in \mathcal{S}. \tag{7}$$

Simbolicamente la (7) si scrive nella forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-x_0) \;=\; f(x_0).$$

"$\delta(x)$" non è una funzione ordinaria, ma può essere pensata come il limite di una successione di funzioni ordinarie $\delta_N(x)$, nel senso seguente:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta_N(x-x_0) \;=\; f(x_0). \tag{8}$$

2 Successioni convergenti alla "δ" di Dirac

Un esempio di queste successioni è dato dalla successione

$$\delta_N(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\sin Nx}{x}, \tag{9}$$

che abbiamo visto nella sezione 1. Comunque, costruire esempi di queste successioni è molto semplice. Basta prendere una funzione $d(y)$, simmetrica e mai negativa, tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, d(y) \;=\; 1. \tag{10}$$

Allora, le successioni $\delta_N = N\, d(N\, x)$ convergono alla "δ" di Dirac secondo la (8), purchè le funzioni dello spazio $\mathcal{S}$ godano di certe proprietà, che sono (a) continuità nell'origine e (b) assoluta integrabilità all'infinito. Vediamo perchè.

Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta_N(x-x_0) \;=\; f(x_0).$$

La proprietà (10) ci permette di riscrivere la formula di sopra nel modo equivalente:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, [f(x)-f(x_0)]\, \delta_N(x-x_0) \;=\; 0. \tag{11}$$

Dividiamo allora in due parti l'insieme di integrazione, uno di misura finita (un intorno di x_0, $|x - x_0| < a$) e uno di misura infinita ($|x - x_0| > a$). Scegliamo arbitrariamente una quantità positiva ϵ. Esisterà allora un $\delta_\epsilon > 0$ tale che per $a < \delta_\epsilon$ risulti:

$$\int_{|x-x_0|<a} dx\, \delta_N(x - x_0)\, |f(x) - f(x_0)| \;\leq\; \max_{|x-x_0|<a} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

(Si noti che in questa stima non abbiamo usato affatto l'indice N).

Consideriamo ora l'integrale su $|x - x_0| > a$. Potremo scrivere:

$$\int_{|x-x_0|>a} dx\, \delta_N(x - x_0)\, |f(x) - f(x_0)| \;\leq\; |f(x_0)| \int_{|x-x_0|>a} dx\, \delta_N(x - x_0) +$$

$$+ \max_{|x-x_0|>a} \delta_N(x - x_0) \int_{|x-x_0|>a} dx\, |f(x)|.$$

È evidente che, pur di scegliere N sufficientemente grande (maggiore di un certo N_ϵ) entrambi i termini di sopra possono essere resi minori di un qualunque ϵ prefissato. Infatti:

$$\int_{|x-x_0|>a} dx\, \delta_N(x - x_0) \;=\; \int_{|y-y_0|>Na} dy\, d(y) \;\to\; 0 \qquad \text{per } N \to \infty,$$

e inoltre

$$\max_{|x-x_0|>a} \delta_N(x - x_0) \int_{|x-x_0|>a} dx\, |f(x)| \;=$$

$$\max_{|y-y_0|>Na} d(y - y_0) \int_{|y-y_0|>Na} dy\, |f(\frac{y}{N})| \;\leq$$

$$\leq \max_{|y-y_0|>Na} d(y - y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, |f(y)| \to 0 \qquad \text{per } N \to \infty.$$

Si noti, incidentalmente, che proprio le funzioni $\frac{\sin Nx}{\pi x}$ non fanno parte della classe considerata perchè pur essendo integrabili su tutta la retta non sono assolutamente integrabili (l'integrabilità é anzi dovuta alle oscillazioni della funzione $\sin x$ che rendono integrabile la funzione $1/x$). Però la dimostrazione funziona ancora, con piccole correzioni (essenzialmente invece della continuità di f bisogna postulare l'assoluta integrabilità del rapporto incrementale e invocare il lemma di Riemann-Lebesgue).

Fra gli esempi più importanti di successioni $\delta_N(x)$ ricordiamo:

1. La successione dei rettangoli. In questo caso la funzione $d(x)$ vale 1 per $|x| < 1/2$ e 0 per $|x| > 1/2$.

2. La successione dei triangoli. La funzione $d(x)$ vale

$$d(x) \;=\; \begin{cases} 1 + x & \text{per } -1 < x < 0 \\ 1 - x & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{per } |x| > 1. \end{cases}$$

Introducendo la funzione a gradino

$$\theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \;,$$

le funzioni della successione dei rettangoli 1 possono scriversi in termini di $d(x) = \theta(1/4 - x^2)$, e quelle della successione dei triangoli 2 usando $d(x) = \theta(1 - x^2)(1 - |x|)$.

3. La successione delle "Lorentziane". In questo caso la funzione $d(x)$ vale

$$d(x) \;=\; \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

4. La successione delle gaussiane. In questo caso la funzione $d(x)$ vale

$$d(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}.$$

Si noti che invece che ad una successione si può pensare ad una famiglia di funzioni del tipo

$$\delta_\nu(x) \;=\; \nu\, d(\nu\, x), \qquad \nu \in \mathcal{R}^+, \qquad (\lim_{\nu\to\infty} \ldots),$$

o, in modo equivalente

$$\delta_\epsilon(x) \;=\; \frac{1}{\epsilon}\, d(\frac{x}{\epsilon}), \qquad \epsilon \in \mathcal{R}^+, \qquad (\lim_{\epsilon\to 0} \ldots).$$

3 Operazioni sulla e con la δ di Dirac

- Abbiamo già detto che la "δ" è un *funzionale lineare*,

$$\delta_{x_0}(c_1\, f_1 + c_2\, f_2) \;=\; c_1\, f_1(x_0) + c_2\, f_2(x_0) \;=\; c_1 \delta_{x_0}(f_1) + c_2 \delta_{x_0}(f_2).$$

- Possiamo dire che è *continuo*? Per definizione di continuità, dovrà valere:

$$\lim_{N\to\infty} \delta_{x_0}(f^{(N)}) \;=\; \delta_{x_0}(f), \qquad \text{dove} \;\lim_{N\to\infty} f^{(N)}(x) \;=\; f(x).$$

  D'altra parte $\delta_{x_0}(f^{(N)}) = f^{(N)}(x_0)$, $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$, e quindi la continuità è assicurata (una condizione sufficiente è la convergenza uniforme della successione $f^{(N)}$).

- *Possiamo parlare di derivabilità?* Osserviamo che, se assumiamo che le funzioni $\delta_N(x)$ siano derivabili, si ha ovviamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta'_N(x) f(x) \;=\; \delta_N(x) f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_N(x) f'(x) \;=$$

$$= \; - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_N(x) f'(x),$$

se f si annulla all'infinito ed è derivabile su tutta la retta.

Quindi, passando al limite,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta'_N(x) f(x) \;=\; -\, f'(0). \tag{12}$$

Possiamo quindi *definire naturalmente* la derivata della δ nel modo seguente:

$$\delta'_{x_0}(f) \;=\; -\, f'(x_0) \;=\; -\, \delta_{x_0}(f'). \tag{13}$$

Possiamo in questo modo definire anche derivate di ordine superiore. In particolare, se le funzioni dello spazio $\mathcal{S}$ sono infinitamente derivabili e si annullano (in modo sufficientemente rapido) all'infinito insieme con tutte le loro derivate, possiamo definire per ogni $n \in \mathcal{N}$:

$$\delta^{(n)}_{x_0}(f) \;=\; (-1)^n f^{(n)}(x_0) \;=\; (-1)^n \delta_{x_0}(f^{(n)}). \tag{14}$$

- Possiamo integrare la "δ"?

  Ragionando sempre sulle successioni approssimanti, cerchiamo di costruire una successione $\theta_N(x)$ tale che:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \theta'_N(x) f(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta_N(x) f(x) \;=\; f(0).$$

  D'altra parte, integrando per parti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \theta'_N(x) f(x) \;=\; \theta_N(x) f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \theta_N(x) f'(x).$$

  Dobbiamo quindi avere:

$$f(0) \;=\; -\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \theta_N(x) f'(x).$$

  Da cui vediamo che ogni successione $\theta_N(x)$ che tende ad una costante più la funzione a gradino $\theta(x)$ definisce una primitiva della δ; infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (a + \theta(x)) f'(x) \;=\; -\, a f(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} dx\, f'(x) \;=\; f(0). \tag{15}$$

- Notiamo che la "δ" ci permette di generalizzare la nozione di *derivata* al caso di *funzioni discontinue*.

  Sia data una funzione $\phi(x)$ di classe C^1 su tutta la retta, ad eccezione di una collezione di punti $\{x_k\}_{k=1}^N$ in cui la funzione é discontinua ma ammette limite destro e sinistro $f^{(\pm)}(x_k) = \lim_{x\to x_k^\pm} f(x)$. Sia $h_k = f^{(+)}(x_k) - f^{(-)}(x_k)$ la discontinuità.

Possiamo associare a $\phi(x)$ il funzionale lineare

$$\phi(f) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi(x) f(x), \qquad \forall f \in \mathcal{S},$$

e definire la derivata di questo funzionale così come abbiamo fatto per la "δ":

$$\phi'(f) \;=\; -\,\phi(f') \;=\; -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi(x) f'(x).$$

Ora possiamo integrare per parti, tenendo conto delle discontinuità di ϕ, ottenendo:

$$\phi'(f) = -\int_{-\infty}^{x_1} dx\, \phi(x) f'(x) - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx\, \phi(x) f'(x) - \int_{x_N}^{+\infty} dx\, \phi(x) f'(x) =$$

$$= \;-\,\phi(x) f(x)|_{-\infty}^{x_1} + \int_{-\infty}^{x_1} dx\, \phi'(x) f(x) - \sum_{k=1}^{N-1} \phi(x) f(x)|_{x_k}^{x_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx\, \phi(x) f'(x) - \phi(x) f(x)|_{x_N}^{+\infty} + \int_{x_N}^{+\infty} dx\, \phi(x) f'(x) \;=$$

$$= \;\sum_{i=1}^{N} h_i f(x_i) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi'(x) f(x).$$

Da cui il risultato: la derivata — nel senso delle distribuzioni, cioè dei funzionali lineari— di una funzione C^1 a tratti, con un numero finito di "salti" h_k, vale:

$$\phi'(x) + \sum_{i=1}^{N} h_i \delta(x - x_i). \tag{16}$$

É chiaro che il risultato sulla primitiva della "δ" non é che un caso particolare di questo risultato assai più generale.

- *La "δ" di funzione*

  É chiaro che, invece di scrivere

  $$f(x_0) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x),$$

  possiamo scrivere anche

  $$f(x_0) \;=\; \int_{x_0-a}^{x_0+a} \delta(x - x_0) f(x), \qquad \forall a, b > 0.$$

Questa osservazione permette di dare un senso a una espressione del tipo $\delta[f(x)]$, dove f é una funzione di classe C^1 con un numero finito di *zeri semplici* ($f(x_i) = 0$; $f'(x_i) \neq 0$).

Siano infatti $x_1, \ldots, x_N$ gli zeri semplici di f, e supponiamo per fissare le idee che $f'(x_1)$ sia positivo, con la conseguenza che $f'(x_i)$ é negativo per i pari e positivo per i dispari. Indichiamo con $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$ i "turning points ($x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$) di $f'(x)$. In ogni intervallo (o semiretta) $I_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$ ($\xi_0 = -\infty$, $\xi_N = +\infty$) la funzione $f(x)$ é monotona, con $f'(x) > 0$ per $i = 0, 2, 4, \ldots$ e $f'(x) < 0$ per $i = 1, 3, 5 \ldots$ (vedi figura 1).

Possiamo quindi scrivere:

$$\int_{I_i} dx\, g(x)\delta[f(x)] \;=\; \int_{\min(b_i,b_{i+1})}^{\max(b_i,b_{i+1})} dy\, \frac{g(x)}{|f'(x)|}\delta(y) \;=$$

con $x = x(y)$,

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}, \qquad \rightarrow \qquad \delta[f(x)] \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \tag{17}$$

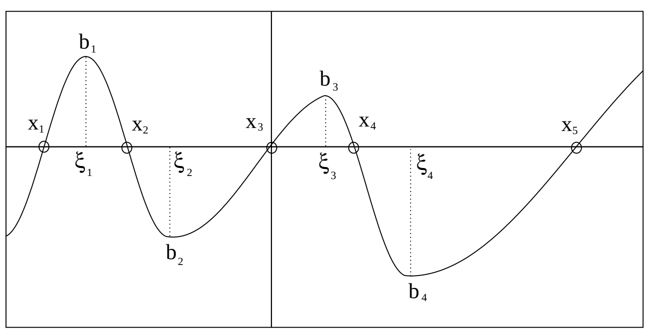

Figure 1: Esempio di funzione di classe C^1 con cinque zeri semplici

.

Per esempio:

$$\delta(x^2 - a^2) \;=\; \frac{1}{2|a|}[\delta(x + a) + \delta(x - a)],$$

$$\delta(\sin x) \; = \; \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - k\pi).$$

- Altre “distribuzioni” importanti.

  Tra le altre “distribuzioni” o “funzioni generalizzate”, oltre alla “δ” e alle sue derivate (e alla sua primitiva) citiamo le distribuzioni $\frac{1}{x \pm i\epsilon}$, che si trovano nella definizione di integrale di tipo Cauchy nel piano complesso ma possono essere definite anche per funzioni (eventualmente a valori complessi) di variabile reale.

  Consideriamo equazioni integrali del tipo:

$$g(x) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{(x-y) \pm i\epsilon}. \tag{18}$$

  Osserviamo che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{(x-y) \pm i\epsilon} \; &= \; \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, f(y) \frac{(x-y) \mp i\epsilon}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \; = \\
= \; \mp i\epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{(x-y)^2 + \epsilon^2} &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, f(y) \frac{[x-y]}{(x-y)^2 + \epsilon^2} \; = \\
&= \; \mp iI_1 + I_2.
\end{aligned}$$

  Per quanto riguarda I_1, é immediato verificare che , per $\epsilon \to 0$, esso da $\pi f(x)$. Infatti la famiglia $\frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + x^2)}$ “tende” alla δ (cfr. la lorenziana).

  Per quanto riguarda I_2, osserviamo anzitutto che, $\forall \epsilon \neq 0$ la funzione $\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$ é integrabile nell’origine e il suo integrale su tutta la retta (inteso nel senso del valore principale all’infinito, cioé come $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \ldots$) si annulla.

  Possiamo perció dire che

$$I_2 \; = \; -\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{[f(y) - f(x)][y-x]}{(y-x)^2 + \epsilon^2}.$$

  Se f soddisfa la condizione del Dini (uniformemente in x) possiamo passare al limite per $\epsilon \to 0$ sotto segno di integrale, ottenendo

$$I_2 \; = \; -\int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \; = \; -P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{y-x} \; = \; P \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \frac{f(y)}{x-y}.$$

  Possiamo quindi scrivere simbolicamente

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} \; = \; P(\frac{1}{x - x_0}) \mp i\pi\delta(x - x_0). \tag{19}$$

4 Trasformate di Fourier e di Laplace

Cominciamo con le trasformate di Laplace della δ e delle sue collegate.

Si ha ovviamente

$$\int_0^\infty dt\, e^{-ts}\delta(t-t_0) \;=\; \begin{cases} e^{-st_0} & (t_0>0) \qquad (a) \\ 0 & (t_0<0) \qquad (b). \end{cases}$$

Per $t_0 = 0$ si ha

$$\lim_{t_0\to o^+} e^{-st_0} \;=\; 1, \qquad\qquad \lim_{t_0\to o^-} 0 \;=\; 0.$$

Si definisce usualmente la trasformata di Laplace di $\delta(t)$ come la semisomma dei due limiti, che vale $1/2$. Riassumendo:

$$e^{-st_0}\theta(t_0). \tag{20}$$

Trasformate di Laplace delle derivate della δ:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt\, e^{-ts}\delta^{(n)}(t-t_0) \;&=\; (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-st}|_{t=t_0}, \qquad (t_0>0), \\ &=\; s^n e^{-st_0}\theta(t_0)\end{aligned} \tag{21}$$

Trasformata di Laplace della funzione a gradino:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt\, e^{-ts}\theta(t-t_0) \;&=\; \begin{cases} \int_0^\infty dt\, e^{-st} & (t_0<0) \\ \int_{t_0}^\infty dt\, e^{-st} & (t_0>0) \;=\; \frac{e^{-st_0}}{s}, \end{cases} \\ &=\; \frac{1}{s} e^{-st_0}\theta(t_0).\end{aligned} \tag{22}$$

Passiamo ora alle trasformate di Fourier.

Se si prende come spazio $\mathcal{S}$ lo spazio delle funzioni che sono infinitamente derivabili e si annullano all'infinito più rapidamente di ogni potenza assieme a tutte le loro derivate, si ha che questo é "invariante" sotto trasformata di Fourier. Cio permette una definizione "incrociata" per le trasformate di Fourier delle distribuzioni. Sia D una distribuzione cui é associata una funzione o un simbolo $D(x)$, e ϕ una generica funzione di $\mathcal{S}$ (le distribuzioni, cioé i funzionali lineari continui, su $\mathcal{S}$ si chiamano *distribuzioni temperate*)

Definiamo allora "trasformata di Fourier" della distribuzione D, la distribuzione $\hat{D}$ cui é associata la funzione o il simbolo $\hat{D}(k)$, nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hat{D}(k)\phi(k) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, D(x)\hat{\phi}(x), \tag{23}$$

usando la notazione di prodotto scalare: $\langle \hat{D}, \phi\rangle = \langle D, \hat{\phi}\rangle$.

Ricordando che

$$\phi(k) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}\hat{\phi}(x),$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\hat{D}(k)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}\hat{\phi}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, D(x)\hat{\phi}(x),$$

da cui

$$D(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx}\hat{D}(k), \tag{24}$$

ovvero

$$\hat{D}(k) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} D(x). \tag{25}$$

Osserviamo che la rappresentazione integrale

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}, \tag{26}$$

ci da immediatamente $\hat{\delta}(k) = 1$

Per le derivate:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hat{\delta}^{(n)}(k)\phi(k) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta^{(n)}(x)\hat{\phi}(x) \;=$$

$$=\; (-1)^n\hat{\phi}^{(n)}(0) \;=\; (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\phi(k)|_{k=0} \;=$$

$$=\; i^n\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^n\phi(k) \qquad\rightarrow\qquad \hat{\delta}^{(n)}(k) \;=\; (ik)^n. \tag{27}$$

Per la primitiva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hat{\theta}(k)\phi(k) \;=\; \int_{0}^{\infty} dx\,\hat{\phi}(x) \;=$$

$$=\; \int_{0}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\phi(k) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\phi(k)\int_{0}^{\infty} e^{-ikx}.$$

L'integrale $\int_0^\infty dx\, e^{-ikx}$ (spesso chiamato $\delta_+(x)$ per ovvi motivi) non converge per k reali. Converge peró se diamo a k una "piccola" parte immaginaria negativa ($k \rightarrow k - i\epsilon$). In questo caso si ottiene:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ikx} \;=\; \lim_{\epsilon\rightarrow 0^+}\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-i(k-i\epsilon)x} \;=$$

$$=\; -\,\frac{1}{-i(k-i\epsilon)} \;=\; -\,\frac{i}{k-i\epsilon}.$$

Quindi,

$$\hat{\theta}(k) \;=\; -\,\frac{i}{k-i\epsilon} \;=\; -\,i[P(\frac{1}{k}) + i\pi\delta(k)] \;=$$

$$= \; -iP(\frac{1}{k}) + \pi\delta(k). \tag{28}$$

Scambiano k in $-k$:

$$\hat{\theta}(-k) \; = \; iP(\frac{1}{k}) + \pi\delta(k),$$

da cui

$$\hat{\theta}(k) + \hat{\theta}(-k) \; = \; 2\pi\delta(k), \tag{29}$$

$$\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(-k) \; = \; 2\hat{\text{sgn}}(k) \; = \; -2iP(\frac{1}{k}). \tag{30}$$