March 8, 2006

Trasformata e Antitrasformata di Laplace

Orlando Ragnisco

Dipartimento di Fisica, Università di Roma TRE
Via della Vasca Navale 84, I-00146-Roma, Italy

1 Trasformata di Laplace: definizione e proprietà di analiticità

La trasformata di Laplace di una funzione assegnata $f(t)$ è definita dall'integrale:

$$\mathcal{L}(s) := \int_0^\infty dt \exp(-st) f(t) \tag{1}$$

Se $|f(t)| \leq C \exp(mt)$ $(m > 0)$ l'integrale (1) converge assolutamente per $Res > m$ e, anzi, definisce una funzione analitica nel semipiano $Res > m$, in quanto (1) converge uniformemente in ogni compatto contenuto in quel semipiano.

Infatti, la successione di funzioni

$$\mathcal{L}_N(s) := \int_0^N dt \exp(-st) f(t)$$

:

1. converge uniformemente in ogni compatto in esso contenuto;
2. è una successione di funzioni analitiche in quel semipiano

Si ha invero:

$$|(L(s) - \mathcal{L}_N(s) \leq C \int_N^\infty dt \exp(m - Res)t$$

$$\leq C \frac{\exp((m - Res)N)}{Res - m} \leq C \frac{\exp((m-a)N)}{a - m} \quad \forall Res \geq a > m$$

inoltre:

$$|\mathcal{L}_N(s+h) - \mathcal{L}_N(s) + \int_0^N dtt \exp(-st) f(t)| = \quad (h = h_R + ih_I)$$

$$|\int_0^N dt \exp(-st) f(t)[t + \frac{\exp(-ht) - 1}{t}]| \leq N^2 C \exp(mN)(1 - \exp(-h_R N) + |h_I N|) \to 0 (h \to 0)$$

1.1 Trasformata di una potenza

Cominciamo con le potenze intere positive. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^n](s) := \int_0^\infty dt \exp(-st)t^n = \\
(-1)^n \int_0^\infty dt \frac{d^n}{ds^n} \exp(-st) = \\
(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty dt \exp(-st) = \\
(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Per trattare il caso di potenze non intere, ricordiamo anzitutto la rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero:

$$
\Gamma(z) = \int_0^\infty dx \exp(-x) x^{z-1} \quad (Rez > 0)
$$

Ponendo $x = ts$ otteniamo:

$$
\Gamma(z) = s^z \int_0^\infty dt \exp(-ts) t^{z-1} \quad (Rez > 0)
$$

Ne deduciamo che la trasformata di Laplace di t^α:

$$
\int_0^\infty dt \exp(-ts) t^\alpha
$$

vale:

$$
\mathcal{L}[t^\alpha](s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}
$$

1.2 Trasformata di un' esponenziale

Si ha evidentemente:

$$
\mathcal{L}[\exp(\alpha t)](s) := \int_0^\infty dt \exp(-s + \alpha t) = \frac{1}{s - \alpha}
$$

L'integrale precedente converge per $Re(s-\alpha) > 0$; il risultato che si ottiene definisce però una funzione analitica in tutto il piano complesso privato del punto $s = \alpha$: si tratta di un semplice esempio di prolungamento analitico di ua rappresentazione integrale.

Dagli esempi svolti ricaviamo la trasformata di Laplace del prodotto di una potenza per un esponenziale:

$$\mathcal{L}[t^n \exp(\alpha t)](s) = \frac{d^n}{d\alpha^n}\mathcal{L}[\exp(\alpha t)](s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

1.3 Trasformata della derivata di una funzione

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) = & \text{ (integrando per parti)} \\ \exp(-st)f(t)\|_0^\infty + s\mathcal{L}[f] = & \, s\mathcal{L}[f] - f(0) \end{aligned} \tag{3}$$

Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) = -f'(0) + s\mathcal{L}[f'](s) = \\ s^2\mathcal{L}[f] - s(f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

E in generale:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0) \tag{4}$$

Si ha una immediata applicazione all soluzione del problema al valore iniziale per equazioni differenziali ordinarie a coefficenti costanti:

$$\sum_{l=0}^{n} a_l f^{(l)}(t) = g(t) \tag{5}$$

Trasformando si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{n} a_l \mathcal{L}[f^{(l)}] = \\ (\sum_{l=0}^{n} a_l s^l)\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1-1} s^k \sum_{l=k+1}^{n} a_l f^{(l-1-k)}(0)] \; = & \; \mathcal{L}[g] \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{L}[f] \; = \; \frac{\mathcal{L}[g] + Q^{(n-1)}(s)}{P^{(n)}(s)} \tag{6}$$

con:

$$P^{(n)}(s) := \sum_{l=0}^{n} a_l s^l$$

$$Q^{(n-1)}(s) := \sum_{k}^{n-1} s^k \sum_{l=k+1}^{n} a_l f^{(l-1-k)}(0)$$

Notiamo ancora che la trasformata di Laplace dell'equazione *include automaticamente le condizioni iniziali.*

1.4 Prodotto di convoluzione

Siano f e g due funzioni definite entrambe per $t \geq 0$. Si definisce *prodotto di convoluzione* $f * g$ la funzione:

$$F(t) := (f * g)(t) = \int_0^t d\tau f(t-\tau) g(\tau) \tag{7}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f + g] &= \int_0^\infty dt \exp(-st) \int_0^t d\tau f(t-\tau) g(\tau) = \\ &\int_0^\infty dt \int_0^t d\tau \exp(-s(t-\tau)) f(t-\tau) \exp(-s\tau)) g(\tau) = \\ (u := t - \tau) \quad &\int_0^\infty d\tau \exp(-s\tau) g(\tau) \int_0^\infty du \exp(-su) f(u) = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] \end{aligned} \tag{8}$$

2 L'antitrasformata di Laplace

Dall' analisi svolta nella sezione precedente, siamo indotti a interpretare la trasformata di Laplace come un opportuno prolungamento analitico della trasformata di Fourier di funzioni definite su una semiretta. La trasformazione inversa, la cosiddetta "Antitrasformata di Laplace" , va pero' considerata con una certa attenzione.

Cerchiamo comunque di seguire il piu' possibile il procedimento usato per definire l'antitrasformata di Fourier. Ammettiamo che la nostra funzione $f(t)$ diverga esponenzialmente per $t \to \infty$, e scegliamo il numero reale γ in modo tale che la funzione $g(t) := f(t) \exp(-\gamma t)$ sia assolutamente integrabile sulla semiretta positiva. Definiamo:

$$G(t) = \theta(t) g(t)$$

Nelle ipotesi fatte, essa ha la trasformata di Fourier:

$$\hat{G}(\omega) = \int_0^\infty \exp(-i\omega t) g(t)$$

$$\int_0^\infty \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma t) f(t) = \int_0^\infty \exp(-(\gamma + i\omega)t) f(t)$$

cioè:

$$\hat{G}(\omega) = \mathcal{L}[f](s = \gamma + i\omega)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \exp(i\omega t) \mathcal{L}(\gamma + i\omega)$$

e quindi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp((\gamma + i\omega)t)\mathcal{L}(\gamma + i\omega)$$

ovvero:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds \exp(st)\mathcal{L}(s) \tag{9}$$

In (9) l'integrale è fatto lungo una parallela all'asse immaginario scelta in modo da lasciare a sinistra tutte le singolarità di $\mathcal{L}(s)$ (che per costruzione è analitica per $Re\ s > \gamma$). Tale retta prende il nome di *cammino di Bromwich.*

Consideriamo due casi semplici in cui è possibile calcolare l'antitrasformata con le usuali tecniche di integrazione nel campo complesso.

1. Supponiamo che $\mathcal{L}(s)$ tenda uniformemente a 0 per $|s| \to \infty$ e abbia soltanto singolarita' polari, cioè che sia una funzione razionale in cui il grado del polinomio a denominatore è maggiore del grado del polinomio a numeratore. Costruiamo il cammino chiuso C come unione di 3 curve: (i) il segmento $z = \gamma + iy,\ y \in [-R, R]$, (ii) i due segmenti paralleli all'asse reale di equazione rispettivamente $z = x + iR$ e $z = x = -iR$, $x \in [0, \gamma]$ percorsi ovviamente in verso opposto, (iii) la semicirconferenza di centro O e raggio R giacente nel semipiano $Rez \leq 0$. Nelle ipotesi fatte, è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds \exp(st)\mathcal{L}(s) = \\ \oint_C dz \exp(zt)\mathcal{L}(z) = \\ i \sum_{k=1}^{N} Res \exp(zt)\mathcal{L}(z)|_{z=z_k} \end{aligned}$$

2. Un caso più generale è quello in cui si assume che $\mathcal{L}(z)$ possa avere un punto di diramazione in $z = 0$, in cui però risulti:

$$\lim_{z \to 0} |z\mathcal{L}(z) - A| = 0 \tag{10}$$

il limite essendo uniforme rispetto ad $Argz$. Il cammino C del punto 1dovra' allora essere "tagliato" lungo il semiasse reale negativo, e contornare l'origine col solito circoletto di raggio infinitesimo, in modo da rendere il punto di diramazione esterno al nuovo cammino d'integrazione, che chiameremo C'. C' sarà C U H, dove H è il cosiddetto *cammino di Henkel.* Avremo in definitiva:

$$f(t) = i \sum_{k=1}^{N} Res \exp(zt)\mathcal{L}(z)|_{z=z_k} + \frac{1}{2\pi} \int_H \exp(tz)\mathcal{L}(z)$$

L'integrale sul cammino di Henkel, nell'ipotesi (10) vale d'altronde:

$$\int_H \exp(tz)\mathcal{L}(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(tx)[\mathcal{L}(x - i0) - \mathcal{L}(x + i0)]$$

Come semplice esercizio, si suggerisce di ritrovare l'antitrasformata di s^α.