# 1 Esercizi su integrali che coinvolgono funzioni polidrome

## 1.1 Funzioni del tipo $e^{ikx}R(e^x)$

Sostituzione: $e^x = t$, $dx = \frac{dt}{t}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} R(e^x) = \int_0^{+\infty} dt t^{ik-1} R(t)$$

Si riconduce a un integrale del tipo $\int_0^\infty dt t^\alpha R(t)$. Esempio:

### 1.1.1 Calcolare le trasformata di Fourier di sech$(x)$

*Soluzione*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \mathrm{sech}(x) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{e^x + e^{-x}} =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} dt \frac{t^{ik-1}}{t + \frac{1}{t}} = 2\int_0^{+\infty} dt \frac{t^{ik}}{t^2+1}$$

Si integra la funzione

$$F(z) = \frac{z^{ik}}{z^2+1}$$

su cammino $\Gamma$:

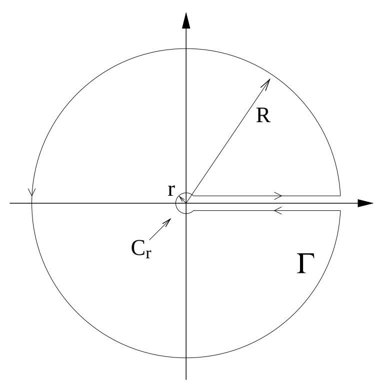


Figure 1: Percorso di integrazione.

Osserviamo che il contributo all'integrale sul circoletto di raggio $r$ (e sul cerchio di raggio $R$) tende a zero nel limite $r \to 0$ ($R \to \infty$) per l'assoluta integrabilità della funzione integranda. Infatti, ad esempio:

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} dzF(z) = ir\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta}\frac{e^{ik(\ln r+i\theta)}}{r^2e^{2i\theta}+1}$$

Ma

$$|\int_{C_r} dzF(z)| \le r\int_0^{2\pi} d\theta\frac{e^{-k\theta}}{|r^2e^{2i\theta}+1|} \le$$

$$\le \frac{r}{1-r^2}\int_0^{2\pi} d\theta e^{-k\theta} = \frac{r}{1-r^2}\frac{1}{k}(1-e^{-2\pi k}) \to 0 \qquad (\text{per } r\to 0)$$

(Dove abbiamo usato la diseguaglianza $|a+b| \ge ||a|-|b||$ ottenendo perciò $|r^2e^{2i\theta}+1| \ge |r^2-1| = 1-r^2$)

Abbiamo quindi:

$$\int_\Gamma F(z) = \int_0^\infty dtF(t) - \int_0^\infty dtF(te^{2\pi i}) =$$

$$\int_0^\infty dt\frac{t^{ik}}{t^2+1}(1-e^{-2\pi k})$$

da cui:

$$\int_0^\infty dt\frac{t^{ik}}{t^2+1} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi k}}(\mathrm{Res}F(z)|_{z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}} + \mathrm{Res}F(z)|_{z=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}})$$

Notare che, col taglio da 0 a $+\infty$ che abbiamo effettuato, l'argomento di $z$ varia fra 0 e $2\pi$, e quindi l'argomento di $i$ è $\frac{\pi}{2}$ e quello di $-i$ è $\frac{3\pi}{2}$. Quindi:

$$\int_0^\infty dt\frac{t^{ik}}{t^2+1} = \frac{2\pi ie^{k\pi}}{2\sinh(k\pi)}(\frac{e^{-k\pi/2}}{2i} - \frac{e^{-3k\pi/2}}{2i}) =$$

$$= \frac{e^{k\pi}}{2\sinh(k\pi)}\pi e^{-k\pi}(e^{k\pi/2} - e^{-k\pi/2}) = \frac{2\pi\sinh(k\pi/2)}{4\sinh(k\pi/2)\cosh(k\pi/2)} =$$

$$= \frac{\pi}{2\cosh(\frac{k\pi}{2})}$$

In definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\mathrm{sech}(x) = \pi\mathrm{sech}(\frac{k\pi}{2})$$

## 1.2 Funzioni del tipo $\ln xR(x)$

Un integrale del tipo:

$$\int_0^\infty dx\ln xR(x)$$

si calcola integrando sullo stesso cammino $\Gamma$ della figura (1) la funzione $[\mathrm{Log}(z)]^2R(z)$. Osserviamo infatti che:

$$\oint_\Gamma dz[\mathrm{Log}(z)]^2R(z) =$$

(nell'ipotesi che $R(z)$ si annulli più rapidamente di $|z|^{-1}$ per $|z| \to \infty$ e diverga meno rapidamente di $|z|^{-1}$ per $|z| \to 0$)

$$= \int_0^\infty dx \ln^2 x R(x) - \int_0^\infty dx (\ln x + 2\pi i)^2 R(x) =$$

$$-4\pi i \int_0^\infty dx \ln x R(x) + 4\pi^2 \int_0^\infty dx R(x)$$

Di conseguenza, applicando il teorema dei residui, abbiamo:

$$2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\{[\mathrm{Log}(z)]^2 R(z)\}|_{z=z_k} = -4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_2$$

(con ovvie definizioni di $I_1$ e $I_2$ ), da cui:

$$\sum_k \mathrm{Res}\{[\mathrm{Log}(z)]^2 R(z)\}|_{z=z_k} = -2I_1 - 2\pi i I_2$$

e quindi:

$$I_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_k \mathrm{Res}\{[\mathrm{Log}(z)]^2 R(z)\}|_{z=z_k})$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}(\sum_k \mathrm{Res}\{[\mathrm{Log}(z)]^2 R(z)\}|_{z=z_k})$$

### 1.2.1 Calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{x^3+1}$$

$$I_2 = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^3+1}$$

Gli zeri di $z^3+1$ sono $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi}$, $e^{i5\pi/3}$. Per cui:

$$\sum_k \mathrm{Res}\{\frac{[\mathrm{Log}(z)]^2}{z^3+1}\} =$$

$$= [\mathrm{Log}(e^{i\pi/3})]^2 \frac{1}{3e^{i2\pi/3}} + [\mathrm{Log}(e^{i\pi})]^2 \frac{1}{3e^{i2\pi}} + [\mathrm{Log}(e^{i5\pi/3})]^2 \frac{1}{3e^{i10\pi/3}} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{9}\frac{e^{-2\pi/3}}{3} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{25\pi^2}{9}\frac{e^{-i4\pi/3}}{3} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{27}(e^{-i2\pi/3} + 25e^{i2\pi/3}) - \frac{\pi^2}{3}$$

$$I_1 = -\frac{1}{2}[-\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{27}(1+25)\cos\frac{2\pi}{3}] = \frac{\pi^2}{6}(1 + \frac{26}{9}\cos\frac{2\pi}{3}) =$$

$$= -\frac{2\pi^2}{27}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi}[\frac{\pi^2}{27} - \frac{25\pi^2}{27}]\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{9}\pi \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}$$

## 1.3 Funzioni del tipo $x^\alpha \ln x R(x)$

Per calcolare integrali del tipo:

$$\int_0^\infty dx x^\alpha \ln x R(x)$$

non è necessario introdurre funzioni con potenze "superiori" del logaritmo, a causa della presenza di due funzioni polidrome (potenza e logaritmo). Considerando infatti la funzione $F(z) = z^\alpha \mathrm{Log}(z) R(z)$ e integrando sul solito cammino si ottiene:

$$\oint_\Gamma dz z^\alpha \mathrm{Log}(z) R(z) =$$

$$= \int_0^\infty dx x^\alpha \ln x R(x) - \int_0^\infty dx x^\alpha x^{2\pi i\alpha}(\ln x + 2\pi i) R(x) =$$

$$= (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty dx x^\alpha \ln x R(x) - 2\pi i e^{2\pi i\alpha} \int_0^\infty dx x^\alpha R(x) =$$

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) I - 2\pi i e^{2\pi i\alpha} J$$

e l'integrale $J$ si calcola col solito metodo utilizzando la funzione ausiliaria $C(z) = z^\alpha R(z)$.

Calcoliamo ad esempio:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx} x}{\cosh x}$$

verificando che il risultato è pari a :

$$-i\frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{\cosh x} = -i\frac{d}{dk}[\pi \mathrm{sech}(\frac{k\pi}{2})] =$$

$$i\frac{\pi^2}{2}\mathrm{sech}(\frac{k\pi}{2}) \tanh \frac{k\pi}{2} \tag{1}$$

Effettuiamo il cambiamento di variabili $x = \ln(t)$, ottenendo:

$$I = 2\int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^{ik} \ln t}{t + \frac{1}{t}} = 2\int_0^\infty dt \frac{t^{ik} \ln t}{t^2 + 1}$$

Abbiamo:

$$2\pi i [\mathrm{Res}\{\frac{z^{ik}\mathrm{Log}(z)}{z^2+1}\}|_{z=e^{i\pi/2}} + \mathrm{Res}\{\frac{z^{ik}\mathrm{Log}(z)}{z^2+1}\}|_{z=e^{i3\pi/2}}] =$$

$$= 2\pi i (\frac{e^{-k\pi/2}(i\pi/2)}{2i} - \frac{e^{-3k\pi/2}(i3\pi/2)}{2i}) =$$

$$= i\frac{\pi^2}{2}(e^{-k\pi/2} - 3e^{-3k\pi/2}) =$$

$$= (1 - e^{-2\pi k})\frac{I}{2} - 2\pi i e^{-2\pi k} J$$

Osserviamo che $J$ va calcolato (cioè non possiamo estrarre $I$ con considerazioni di realtà dalla formula precedente, in quanto $I$ è puramente immaginario).

$$(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}x}{\cosh x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos{(kx)}x}{\cosh x} + i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin{(kx)}x}{\cosh x})$$

$$J = \int_0^\infty dx \frac{t^{ik}}{t^2+1} = \frac{\pi}{2\cosh\frac{k\pi}{2}}$$

Quindi:

$$\frac{i\pi^2}{2} e^{-k\pi}(e^{k\pi/2} - 3e^{-k\pi/2}) =$$

$$= 2e^{-k\pi}(\sinh k\pi)\frac{I}{2} - 2\pi i e^{-2\pi k}\frac{\pi}{2\cosh\frac{k\pi}{2}}$$

$$(\sinh k\pi)I = \frac{i\pi^2}{2}(e^{k\pi/2} - 3e^{-k\pi/2} + 2\frac{e^{-\pi k}}{\cosh k\pi/2}) =$$

$$= \frac{i\pi^2}{2\cosh k\pi/2}(\frac{e^{k\pi}+1}{2} - 3\frac{e^{-k\pi}+1}{2} + 2e^{-k\pi}) =$$

$$\frac{i\pi^2}{4}\frac{1}{\cosh k\pi/2}(e^{k\pi} + e^{-k\pi} - 2)$$

$$(\sinh k\pi)I = i\pi^2\frac{\sinh^2 k\pi/2}{\cosh k\pi/2}$$

$$\Rightarrow \qquad I = \frac{i\pi^2}{2}\frac{\sinh k\pi/2}{\cosh^2 k\pi/2}$$

che è esattamente uguale a (1).

## 2 Integrali coinvolgenti funzioni polidrome e singolarità sul cammino d'integrazione

Supponiamo che la funzione integranda sia del tipo $x^\alpha R(x)$, oppure $\ln x R(x)$, oppure $x^\alpha \ln x R(x)$ e che $R(x)$ abbia un polo del primo ordine in $x_0 > 0$. Allora il cammino da scegliere è quello indicato in figura(2).

Per fissare le idee, supponiamo che la funzione integranda sia del tipo $x^\alpha R(x)$. Allora, sopra il taglio avremo il contributo:

$$\int_0^{x_0-\epsilon} dx x^\alpha R(x) + \int_{\frac{1}{2}C_{\epsilon,x_0}} dz z^\alpha R(z) + \int_{x_0+\epsilon}^\infty dx x^\alpha R(x)$$

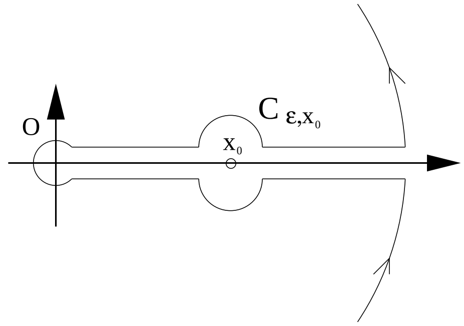


Figure 2: Percorso di integrazione

Mentre sotto il taglio avremo:

$$e^{2\pi i\alpha}\int_{\infty}^{x_0+\epsilon} dx x^\alpha R(x) + e^{2\pi i\alpha}\int_{\frac{1}{2}C_{\epsilon,x_0}} dz z^\alpha R(z) + e^{2\pi i\alpha}\int_{x_0-\epsilon}^{0} dx x^\alpha R(x)$$

Il contributo complesso (assumendo nulli, come al solito, i contributi provenienti dalla circonferenza infinitesima di centro $O$ e dalla circonferenza all'infinito, sempre di centro $O$) del cammino di integrazione vale perciò:

$$(1-e^{2\pi i\alpha})P\int_0^\infty dx x^\alpha R(x) + (1+e^{2\pi i\alpha})\int_{\frac{1}{2}C_{\epsilon,x_0}} dz z^\alpha R(z)$$

Abbiamo messo insieme i due integrali sulla semicirconferenza di centro $x_0$ e raggio $\epsilon$, in quanto sono percorsi nello stesso senso e danno di conseguenza lo stesso contributo, pari a $-i\pi \mathrm{Res}[z^\alpha R(z)]|_{z=x_0}$.

In definitiva, possiamo scrivere:

$$P\int_0^\infty dx x^\alpha R(x) =$$

$$= -\pi\cot(\pi\alpha)\mathrm{Res}[z^\alpha R(z)]|_{z=x_0} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum_k \mathrm{Res}[z^\alpha R(z)]|_{z=z_k} \qquad (\arg z_k > 0)$$

Si procede analogamente per le funzioni del tipo

$$\ln x R(x) \qquad \text{e} \qquad x^\alpha \log x R(x)$$

In particolare si ha che:

$$-4\pi i P\int dx \ln x R(x) + 4\pi^2 P\int dx R(x) =$$

$$= 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[\mathrm{Log}^2(z)R(z)]|_{z=z_k} + \qquad (\text{compreso } z_0 = x_0)$$

$$-4\pi^2 \mathrm{Res}[\mathrm{Log}(z)R(z)]|_{z=x_0} - 4i\pi^3 \mathrm{Res}[R(z)]|_{z=x_0}$$

Dividendo per $-4\pi i$:

$$P\int_0^\infty dx \ln x R(x) + i\pi P\int dx R(x)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Res}[\mathrm{Log}^2(z)R(z)]|_{z=z_k} \qquad (\text{compreso } z_0 = x_0)$$

$$-i\pi \mathrm{Res}[\mathrm{Log}(z)R(z)]|_{z=x_0} + \pi^2 \mathrm{Res}[R(z)]|_{z=x_0}$$

Se $R(z)$ è reale, prendendo parte reale e parte immaginaria, otteniamo:

$$P\int_0^\infty dx \ln x R(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\sum_k \mathrm{Res}[\mathrm{Log}^2(z)R(z)]|_{z=z_k \cup x_0}\} + \pi^2 \mathrm{Res}[R(z)]|_{z=z_0}$$

$$P\int_0^\infty dx R(x) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\{\sum_k \mathrm{Res}[\mathrm{Log}^2(z)R(z)]\}|_{z=z_k \cup x_0} - \mathrm{Res}[\mathrm{Log}(z)R(z)]|_{z=z_0}$$

Inoltre abbiamo:

$$(1-e^{2\pi i\alpha})P\int_0^\infty dx x^\alpha \ln x R(x) - 2\pi i e^{2\pi i\alpha} P\int_0^\infty dx x^\alpha R(x) +$$

$$-(1+e^{2\pi i\alpha})\mathrm{Res}[z^\alpha \mathrm{Log}(z)R(z)]|_{z=x_0} + 2\pi^2 e^{2\pi i\alpha}\mathrm{Res}[z^\alpha R(z)]|_{z=x_0} =$$

$$2\pi i\sum_k \mathrm{Res}[z^\alpha \mathrm{Log}(z)R(z)]|_{z=z_k}, \qquad (\arg z_k > 0)$$

*Esercizio*:

$$P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^3-1}$$

Applicando le formule di pagina (6) abbiamo:

$$P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^3-1} = -\pi\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{Res}\left(\frac{z^{1/3}}{z^3-1}\right)|_{z=1}$$

$$+\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/3}}[\mathrm{Res}[z^{1/3}R(z)]|_{z=e^{i2\pi/3}} + \mathrm{Res}[z^{1/3}R(z)]|_{z=e^{i4\pi/3}}]$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^{1/3}}{z^3-1}|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^{1/3}}{z^3-1}|_{z=e^{i2\pi/3}} = \frac{e^{i2\pi/9}}{3e^{i4\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{10}{9}\pi} = -\frac{1}{3}e^{-i\pi/9}$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^{1/3}}{z^3-1}|_{z=e^{i4\pi/3}} = \frac{e^{i4\pi/9}}{3e^{i8\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{20}{9}\pi} = \frac{1}{3}e^{-i2\pi/9}$$

Quindi:

$$P\int_0^\infty dx\,\frac{x^{1/3}}{x^3-1} = -\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi i e^{-i\pi/3}}{2i\sin(\pi/3)}\frac{1}{3}[e^{-i2\pi/9} - e^{-i\pi/9}] =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\frac{e^{-i5\pi/9} - e^{-i4\pi/9}}{\sin(\pi/3)} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}[\cot\pi/3 - 2\frac{\cos 4\pi/9}{\sin\pi/3}] =$$

$$= \frac{\pi}{3}[\frac{2\cos 4\pi/9}{\sin\pi/3} - \cot\pi/3]$$