

1 Operatori differenziali e funzione di Green

1.1 Equazioni differenziali con condizioni al contorno

Consideriamo l'operatore differenziale:

$$L = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

con $p(x)$ e $q(x)$ funzioni reali e assolutamente continue su un intervallo $[a, b]$, e l'equazione differenziale associata:

$$L f(x) = h(x) \quad h \in L_2[a, b] \quad (1)$$

Il dominio di L è costituito dal sottoinsieme, *denso* su $L_2[a, b]$, costituito dalle funzioni continue con derivata prima assolutamente continua (tali cioè che $f'' \in L_2[a, b]$).

Determiniamo la varietà lineare (sottospazio non necessariamente chiuso) di $\mathcal{D}(L)$ su cui L è autoaggiunto, e indichiamola con $\mathcal{V}(L)$.

Dovrà essere:

$$(f, Lg) = (Lf, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{V}(L)$$

D'altronde:

$$\begin{aligned} (f, Lg) &= \int_a^b dx \bar{f}(x) \left[\frac{d}{dx} (p(x)g'(x)) + q(x)g(x) \right] = \\ &= \int_a^b dx q(x)\bar{f}(x)g(x) + \bar{f}(x)p(x)g'(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx \bar{f}'(x)p(x)g'(x) = \\ &= \int_a^b dx \left[\frac{d}{dx} (p(x)\bar{f}'(x)) + q(x)\bar{f}(x) \right] g(x) + \\ &\quad + (\bar{f}'(x)p(x)g'(x) - \bar{f}(x)p(x)g'(x)) \Big|_a^b \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo:

$$(f, Lg) = (Lf, g) + p(b) [\bar{f}(b)g'(b) - \bar{f}'(b)g(b)] - p(a) [\bar{f}(a)g'(a) - \bar{f}'(a)g(a)]$$

Di conseguenza L è autoaggiunto sulla varietà lineare $\mathcal{V}(L)$ (che si può dimostrare densa su $\mathcal{D}(L)$ e quindi densa su $L_2[a, b]$) costituita dalle funzioni che annullano il termine al contorno

$$p(\bar{f}g' - \bar{f}'g) \Big|_a^b$$

Nel caso generale $p(b) \neq p(a)$ dovranno essere soddisfatte separatamente le condizioni:

$$(\bar{f}g' - \bar{f}'g)(b) = (\bar{f}g' - \bar{f}'g)(a) = 0$$

e quindi si dovrà avere:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &= 0 && \text{(condizioni di Dirichlet)} \\ f'(a) = f'(b) &= 0 && \text{(condizioni di Neumann)} \\ \begin{cases} \alpha f(a) + \beta f'(a) = 0 \\ \gamma f(b) + \delta f'(b) = 0 \end{cases} &&& \text{(condizioni miste)} \end{aligned}$$

Nel caso in cui $p(b) = p(a)$ (ad es. p periodico o costante) saranno accettabili anche condizioni periodiche: $f(b) = f(a)$, $f'(b) = f'(a)$.

Tralasciando per il momento quest'ultimo caso, indichiamo genericamente con $B_a(f) = 0$, $B_b(f) = 0$ le condizioni al contorno che rendono L autoaggiunto e proponiamoci di costruire la soluzione dell'equazione differenziale (1) che le soddisfa.

Vedremo che questa soluzione *esiste ed è unica* se l'equazione omogenea associata

$$Lf = 0 \quad (2)$$

ammette, *sotto tali condizioni* (cioè in $\mathcal{V}(L)$) *solo la soluzione nulla*, cioè se l'operatore L è invertibile come operatore da $\mathcal{V}(L)$ a $\text{Im}(L)$ ($\overline{\text{Im}(L)} = L_2[a, b]$).

Se ora noi troviamo l'inverso destro di L , cioè un operatore G da $L_2[a, b]$ in $\mathcal{V}(L)$ tale che:

$$LG = \mathbf{1}$$

avremo ovviamente che $f = Gh$ è soluzione della (1); in effetti:

$$LGh = h$$

Mostreremo ora che tale inverso esiste ed è unico sotto la condizione (2), ed ha la forma di un operatore integrale:

$$(Gh)(x) = \int_a^b dy G(x, y)h(y)$$

che risulterà *autoaggiunto* e *compatto*.

Il nucleo dell'operatore G è definito dalla richiesta di soddisfare l'equazione differenziale:

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y)$$

e le condizioni al contorno $B_a(G(\cdot, y)) = B_b(G(\cdot, y)) = 0$

Sia $f = Gh$, cioè:

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y)h(y)$$

Si ha intanto, ovviamente, $f \in \mathcal{V}(L)$, in quanto

$$B_a(f) = \int_a^b dy B_a(G(\cdot, y))h(y) = 0$$

Inoltre:

$$(Lf)(x) = \int_a^b dy L_x G(x, y)h(y) = \int_a^b dy \delta(x - y)h(y) = h(x) \quad x \in [a, b]$$

Si tratta quindi di determinare $G(x, y)$.

Osserviamo che l'equazione differenziale

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y)$$

impone:

$$L_x G(x, y) = 0 \quad x \neq y$$

ed inoltre, integrando in x tra $y^- = y - \epsilon$ e $y^+ = y + \epsilon$, e passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0$:

$$p(y) \left[\lim_{x \rightarrow y^+} G_x(x, y) - \lim_{x \rightarrow y^-} G_x(x, y) \right] = 1$$

Si ha perciò, indicando con $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due soluzioni indipendenti dell'omogenea:

$$\begin{aligned} C^{(+)}(x, y) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) & x > y \\ C^{(-)}(x, y) &= d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x) & x < y \end{aligned}$$

Imponendo:

a) Continuità in $x = y$:

$$(c_1 - d_1)u_1(y) + (c_2 - d_2)u_2(y) = 0$$

b) Discontinuità nella derivata prima in $x = y$ (Cf. ??)

$$(c_1 - d_1)u_1'(y) + (c_2 - d_2)u_2'(y) = \frac{1}{p(y)}$$

e risolvendo il sistema nelle incognite $c_1 - d_1$, $c_2 - d_2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} c_1 - d_1 &= \frac{u_2(y)}{W} \\ c_2 - d_2 &= \frac{-u_1(y)}{W} \end{aligned}$$

dove si è indicata con W la quantità (costante!) $p(u_1' u_2 - u_1 u_2')$.

Abbiamo di conseguenza

$$G^{(+)}(x, y) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = G^{(-)}(x, y) + \frac{1}{W} (u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y))$$

Le costanti d_1 e d_2 saranno determinate imponendo le condizioni al contorno:

$$B_a(G) = B_b(G) = 0$$

È chiaro che la condizione $B_a(G) = 0$ andrà imposta su G^- e la condizione $B_b(G) = 0$ andrà imposta su G^+ .

Cioè:

$$\begin{aligned} d_1 B_a(u_1) + d_2 B_a(u_2) &= 0 \\ d_1 B_b(u_1) + d_2 B_b(u_2) &= -\frac{1}{W} [B_b(u_1)u_2(y) - B_b(u_2)u_1(y)] \end{aligned}$$

In definitiva, abbiamo un sistema di due equazioni nelle due incognite d_1 e d_2 , la cui soluzione esisterà e sarà unica, *garantendo così l'unicità della funzione di Green* (quindi dell'inverso destro di L e quindi della soluzione dell'equazione differenziale (1) in $\mathcal{V}(L)$), se e solo se il determinante dei coefficienti è diverso da zero:

$$B_a(u_1)B_b(u_2) - B_a(u_2)B_b(u_1) \neq 0$$

Ora, il determinante dei coefficienti sarà nullo se e solo se esistono due costanti α_1 e α_2 non entrambe nulle tali che si abbia:

$$\begin{aligned}\alpha_1 B_a(u_1) + \alpha_2 B_a(u_2) &= 0 \\ \alpha_1 B_b(u_1) + \alpha_2 B_b(u_2) &= 0\end{aligned}$$

cioè, sfruttando la linearità delle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}B_a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= 0 \\ B_b(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= 0\end{aligned}$$

Ritroviamo quindi la preannunciata condizione: la funzione di Green esiste ed è unica se e solo se l'unica soluzione in $\mathcal{V}(L)$ di $Lf = 0$ è la soluzione nulla.

Per determinare G , possiamo allora ad esempio scegliere u_1 tale che $B_a(u_1) = 0$ e u_2 tale che $B_b(u_2) = 0$, ottenendo:

$$d_2 = 0; \quad d_1 = -\frac{u_2(y)}{W}$$

In definitiva:

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{u_2(x)u_1(y)}{W} & x > y \\ -\frac{u_1(x)u_2(y)}{W} & x < y \end{cases}$$

■

È ora immediato verificare che, se L è autoaggiunto, G è un operatore autoaggiunto compatto in $L_2[a, b]$. Infatti:

1. G è compatto su $C[a, b]$, e quindi a maggior ragione su $L_2[a, b]$, perché $G(x, y)$ è una funzione continua sul quadrato (o comunque di quadrato sommabile).
2. G è autoaggiunto, poiché risulta $G(t, s) = \bar{G}(s, t)$. Per mostrarlo osserviamo che:

$$L_x G(x, y) = \delta(x - y) \Rightarrow \int_a^b dx \bar{f}(x) (L_x G)(x, y) = \bar{f}(y)$$

Ma L è autoaggiunto, quindi:

$$\bar{f}(y) = \int_a^b dx (L_x \bar{f})(x) G(x, y) = \int_a^b dx (\overline{L_x f})(x) G(x, y) = \int_a^b dx \bar{h}(x) G(x, y)$$

vale a dire:

$$f(x) = \int_a^b dy h(y) \bar{G}(y, x)$$

Ma abbiamo appena mostrato che:

$$f(x) = \int_a^b dy h(y) G(x, y)$$

quindi

$$0 = \int_a^b dy h(y) (\bar{G}(y, x) - G(x, y)) \quad \forall h \in L_2[a, b]$$

Ma allora $\forall x \in [a, b]$ $\bar{G}(y, x) - G(x, y)$ è il vettore nullo. Ne segue $\bar{G}(y, x) = G(x, y)$ quasi ovunque nel quadrato, e quindi ovunque perché G è continua.

Dalle proprietà di G segue quindi che:

- a Gli autovettori di G (e quindi di L , perché da $Gv^{(n)} = k_n v^{(n)}$ segue ovviamente $LGv^{(n)} = v^{(n)} = k_n Lv^{(n)}$, cioè $Lv^{(n)} = k_n^{-1} v^{(n)}$) costituiscono una base ortonormale in $L_2[a, b]$.
- b Gli autovalori di G formano una successione assolutamente convergente a zero, limitata superiormente da

$$|k_{\max}| = \|G\| = \frac{(v_{\max}, Gv_{\max})}{(v_{\max}, v_{\max})}$$

Quindi gli autovalori di L formano una successione assolutamente divergente limitata inferiormente da:

$$|\lambda_{\min}| = \frac{1}{|k_{\max}|}$$

Consideriamo ora, in luogo dell'equazione differenziale $Lf = h$, l'equazione differenziale $(L - \lambda)f = h$. Tutte le considerazioni svolte precedentemente per L si possono applicare all'operatore $L - \lambda$. Segue quindi che:

1. La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ soluzione dell'equazione $(L - \lambda)\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \delta(x - y)$, che soddisfa alle condizioni al contorno $B_a(\mathcal{R}(x, y; \lambda)) = B_b(\mathcal{R}(x, y; \lambda)) = 0$ ($\forall y$), e quindi l'operatore risolvente $R_L(\lambda)$, è univocamente determinato se l'equazione omogenea $(L - \lambda)f = 0$ ammette solo la soluzione nulla in $\mathcal{V}(L)$, vale a dire *se λ non è autovalore di L* . Quindi se λ non è autovalore di L , $R_L(\lambda)$, cioè il *risolvente di L* , è un operatore *autoaggiunto compatto* in $L_2[a, b]$. Si può anche dimostrare, nelle ipotesi fatte, che $R_L(\lambda)$ ha, come funzione del parametro complesso λ , singolarità polari nei punti λ_n che corrispondono agli autovalori di L . Per verificarlo, osserviamo che, essendo $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ una funzione continua di x , $\forall \lambda \neq \lambda_n$ (quindi ovviamente appartenente a $L_2[a, b]$) e costituendo gli autovettori $\{v^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ di L una

base ortonormale in $L_2[a, b]$, varrà (nel senso della convergenza in L_2) la relazione:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y; \lambda) v^{(n)}(x)$$

dove $c_n(y; \lambda) = (v^{(n)}, \mathcal{R}(\cdot, y; \lambda))$. D'altra parte:

$$\left(v^{(n)}, (L - \lambda) \mathcal{R}(\cdot, y; \lambda) \right) = (\lambda_n - \lambda) c_n(y; \lambda) = \bar{v}^{(n)}(y)$$

da cui

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{v}^{(n)}(y) v^{(n)}(x)}{\lambda_n - \lambda}$$

E quindi (nel senso della convergenza debole):

$$\delta(x - y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}^{(n)}(y) v^{(n)}(x)$$

(Con ogni base ortonormale di vettori in $L_2[a, b]$ è possibile costruire una successione di funzionali convergenti alla δ di Dirac).

1.2 Applicazioni

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = g(x) \quad (3)$$

con le condizioni al contorno $f(0) = f(L) = 0$ e proponiamoci di trovarne la soluzione con il metodo della funzione di Green.

A tale scopo, identifichiamo due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata che soddisfino rispettivamente le condizioni al contorno in $x = 0$ e in $x = L$.

Possiamo prendere:

$$u_1(x) = \sin(\omega x) \quad , \quad u_2(x) = \sin[\omega(L - x)]$$

Il loro Wronskiano vale:

$$W = \omega \sin(\omega L)$$

che è diverso da zero, garantendo quindi l'indipendenza delle due soluzioni, non appena

$$\omega \neq \omega_k = \frac{k\pi}{L} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Quindi per $\omega \neq \omega_k$ la funzione di Green dell'equazione (3) esiste ed è unica e vale:

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{-\sin[\omega(L - x)] \sin(\omega y)}{\omega \sin(\omega L)} & x > y \\ \frac{-\sin(\omega x) \sin[\omega(L - y)]}{\omega \sin(\omega L)} & x < y \end{cases}$$

e la soluzione dell'equazione differenziale (3) con le condizioni al contorno assegnate vale:

$$f(x) = \int_0^L dy G(x, y) g(y)$$

A cosa corrispondono i valori ω_k che rendono singolare la funzione di Green? Per capirlo consideriamo l'equazione agli autovalori

$$Lf = \lambda f \quad \text{con} \quad L = \frac{d^2}{dx^2}, \quad f(0) = f(L) = 0 \quad (4)$$

Notiamo subito che, ponendo $\lambda = -\omega^2$ l'equazione (4) diventa l'equazione omogenea associata alla (3), e che quindi la funzione di Green associata all'operatore $D^2 + \omega^2$ ($D = d/dx$) non è nient'altro che il nucleo del risolvete dell'operatore D^2 nello spazio funzionale considerato. I valori ω_k sono i valori tali che $u_2^{(k)}(x) = c_k u_1^{(k)}(x)$, quindi i valori per cui l'equazione omogenea $(D^2 + \omega_k^2)u^{(k)} = 0$ ammette soluzioni non banali che soddisfano entrambe le condizioni al contorno: cioè sono gli *autovalori* dell'operatore D^2 nello spazio funzionale individuato dalle condizioni al contorno considerate.

Ricordando l'espressione del nucleo dell'operatore risolvete in termini di autovalori e autofunzioni di L si ottiene:

$$\mathcal{R}(x, y; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{v}^{(k)}(y) v^{(k)}(x)}{\omega^2 - \omega_k^2} \quad \left(\omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \quad v^{(k)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\omega_k x) \right)$$

Si ha quindi l'identità:

$$\mathcal{R}(x, y; \omega) = G(x, y; \omega)$$

che è facilmente verificabile, nel caso particolare in questione, utilizzando la formula integrale di Cauchy e il teorema dei residui:

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d\omega' G(x, y; \omega')}{\omega' - \omega} = G(x, y, \omega) + \sum_k \text{Res} \frac{G(\cdot, \cdot; \omega')}{\omega' - \omega} \Big|_{\omega' = \omega_k}$$

Essendo ω_k le singolarità (polari) di G contenute all'interno della curva C .

In particolare, mandando il raggio del cerchio C (o in generale la minima distanza della curva dall'origine) all'infinito e tenendo conto che:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{d\omega' G(x, y; \omega')}{\omega' - \omega} = 0$$

si ha:

$$G(x, y, \omega) = - \sum_k \text{Res} \frac{G(\cdot, \cdot; \omega')}{\omega' - \omega} \Big|_{\omega' = \omega_k}$$

D'altra parte:

$$- \text{Res} \frac{G(\cdot, \cdot; \omega')}{\omega' - \omega} \Big|_{\omega' = \omega_k} = \begin{cases} \lim_{\omega' \rightarrow \omega_k} \frac{\omega' - \omega_k}{\omega' - \omega} \frac{\sin[\omega'(L-x)] \sin(\omega' y)}{\omega' \sin(\omega' L)} & x > y \\ \lim_{\omega' \rightarrow \omega_k} \frac{\omega' - \omega_k}{\omega' - \omega} \frac{-\sin(\omega x) \sin[\omega(L-y)]}{\omega \sin(\omega L)} & x < y \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \lim_{\omega' \rightarrow \omega_k} \frac{\omega' - \omega_k}{\omega' - \omega} \frac{\sin(\omega_k x) \sin(\omega_k y)}{\omega_k \sin(\omega' - \omega_k) L} = \\
&= - \frac{1}{L} \frac{\sin(\omega_k x) \sin(\omega_k y)}{\omega_k \sin(\omega' - \omega_k)}
\end{aligned}$$

Da cui, osservando che ad ogni polo ω_k corrisponde un polo $\omega_{-k} = -\omega_k$, si ottiene:

$$G(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^i n f t y \frac{\sin(\omega_k x) \sin(\omega_k y)}{\omega^2 - \omega_k^2}$$

e cioè il risultato “teoricamente” previsto.

2 Equazioni differenziali con condizioni “iniziali”

Supponiamo ora che si voglia risolvere l’equazione differenziale

$$L f = g \quad L = D p D + q$$

con le condizioni $f(a) = c_1$; $f'(a) = c_2$ (o combinazioni lineari delle stesse). In altre parole, supporremo assegnate condizioni non omogenee (ovviamente compatibili) del tipo:

$$B_a^{(1)}(f) = c_1 \quad B_a^{(2)}(f) = c_2$$

Una possibile strategia per la soluzione di equazioni differenziali di questo tipo è utilizzare un’appropriata funzione di Green per la costruzione di una soluzione particolare che soddisfi le condizioni omogenee corrispondenti, aggiungendogli la soluzione dell’omogenea che soddisfa le condizioni non omogenee assegnate.

A) Costruzione dell’appropriata soluzione dell’omogenea.

Siano $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due soluzioni indipendenti dell’equazione:

$$L f^{(0)} = 0$$

La soluzione generale sarà del tipo

$$\begin{aligned}
f^{(0)} &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 \\
B_a^{(1)}(f^{(0)}) &= \gamma_1 B_a^{(1)}(u_1) + \gamma_2 B_a^{(1)}(u_2) = c_1 \\
B_a^{(2)}(f^{(0)}) &= \gamma_1 B_a^{(2)}(u_1) + \gamma_2 B_a^{(2)}(u_2) = c_2
\end{aligned}$$

La soluzione esiste ed è unica se l’unica soluzione dell’omogenea associata è quella identicamente nulla, cioè se non esiste una soluzione dell’equazione differenziale $L f^{(0)} = 0$ che soddisfi entrambe le condizioni $B_a^{(1)}(f^{(0)}) = B_a^{(2)}(f^{(0)}) = 0$ a parte la soluzione nulla $f^{(0)} = 0$.

B) Una volta determinata l'appropriata soluzione dell'equazione omogenea associata, bisogna scegliere una funzione di Green che soddisfi le condizioni omogenee

$$B_a^{(1)}(G(\cdot, y)) = B_a^{(2)}(G(\cdot, y)) = 0$$

A questo punto bisogna distinguere due casi:

(a) caso in cui si chiede di determinare la soluzione per $x \geq a$.

In questo caso si riconosce subito che la funzione di Green appropriata è:

$$G(x, y) = \begin{cases} G^{(+)}(x, y) & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

cioè

$$G(x, y) = \Theta(x - y)G^{(+)}(x, y)$$

Infatti con questa scelta si ha:

$$G(x, y) = \Theta(x - y) \frac{1}{W} (u_1(x)u_2(y) - u_2(x)u_1(y))$$

$$f = f^{(0)} + \int_a^x dy G^{(+)}(x, y)h(y)$$

$$Lf = Lf^{(0)} + L \int_a^x dy G^{(+)}(x, y)h(y) = h$$

ed inoltre:

$$B_a^{(1)}(f) = B_a^{(1)}(f^{(0)}) = c_1$$

$$B_a^{(2)}(f) = B_a^{(2)}(f^{(0)}) = c_2$$

(b) caso in cui si chiede di determinare la soluzione per $x \leq a$.

Con analoghe considerazioni si riconosce che la soluzione è data da:

$$f = f^{(0)} + \int_x^a dy G^{(-)}(x, y)h(y)$$

cioè

$$G(x, y) = \begin{cases} 0 & x > y \\ G^{(-)}(x, y) & x \leq y \end{cases}$$