Esame di Fisica Generale I per Elettronici (Primo modulo)

Prova del 1 marzo 2001

Soluzioni dei problemi

PROBLEMA N.1

1.1) Detta ℓ la lunghezza della molla per una generica posizione del corpo, sia ha $\ell(x) = \sqrt{d^2 + x^2}$, per cui l'energia potenziale di ciascuna molla è

$$U_1(x) = \frac{1}{2} k \,[\ell(x) - \ell_0]^2$$

e l'energia potenziale totale del sistema è

$$U(x) = 2\,U_1(x) = k\,[\ell(x) - \ell_0]^2 = k\,\left[\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0\right]^2$$

1.2)

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0\right]^2 = -2kx\left[1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right]$$

1.3) Sviluppando $F(x)$ in serie di Taylor e arrestandosi al primo ordine in x:

$$F(x) \simeq -k'x \qquad \text{con } \; k' = 2k\left(1 - \frac{\ell_0}{d}\right)$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{con } \; \omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{d}\right)}$$

PROBLEMA N.2

2) Le leggi orarie per i due corpi sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cos\vartheta_1 \ t \\ y_1(t) = v_1 \sin\vartheta_1 \ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = v_2 \cos\vartheta_2 \ t + D \\ y_2(t) = -v_2 \sin\vartheta_2 \ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

e, all'istante dell'impatto,

$$\begin{cases} x_1(t^*) = x_2(t^*) \\ y_1(t^*) = y_2(t^*) \end{cases}$$

Dalla seconda di queste equazioni, si ottiene

$$v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\vartheta_2 = \frac{v_1}{v_2} \sin\vartheta_1$$

mentre, dalla prima,

$$v_1 \cos\vartheta_1 \ t^* + v_2 \cos\vartheta_2 \ t^* = D \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{D}{v_1 \cos\vartheta_1 + v_2 \cos\vartheta_2}$$

Utilizzando la relazione tra ϑ_1 e ϑ_2 si ha

$$t^* = \frac{D}{v_1 \cos\vartheta_1 + \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \sin^2\vartheta_1}} = 0.25 \text{ s}$$

e, da una qualsiasi delle due espressioni per $x(t)$,

$$x^* = x_1(t^*) = x_2(t^*) = v_1 \cos\vartheta_1 \ t^* = 1.74 \text{ m}$$