Esame di Fisica Generale I per Elettronici (Primo modulo)

Prova del 6 luglio 2001

Soluzioni dei problemi

PROBLEMA N.1A

1.1) Dette h_A e h_B le quote dei punti A e B, rispettivamente, per la conservazione dell'energia si ha

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \ ,$$

da cui, poiché $h_A = R$ e $h_B = R - R\cos\vartheta$, si ottiene

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gR\cos\vartheta} = 2.98 \text{ m/s} \ .$$

1.2) Le leggi del moto lungo i due assi sono

$$\begin{cases} x(t) = x_B + v_{Bx}t \\ y(t) = y_B + v_{By}t - \frac{1}{2}gt^2 \ , \end{cases}$$

con $x_B = R\sin\vartheta$, $y_B = R(1-\cos\vartheta)$, $v_{Bx} = v_B\cos\vartheta$, e $v_{By} = v_B\sin\vartheta$. Eliminando il tempo dalle due equazioni si ottiene l'espressione della traiettoria nel piano xy:

$$y(x) = y_B + \frac{v_{By}}{v_{Bx}}(x - x_B) - \frac{g}{2v_{Bx}^2}(x - x_B)^2 \ ,$$

da cui, in particolare, si può ricavare la coordinata dell'impatto, D. Ponendo infatti $y(D) = 0$ e risolvendo l'equazione di secondo grado in $(D - x_B)$, si ha (scartando la soluzione < 0)

$$D = x_B + \frac{v_{Bx}v_{By}}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_B}{v_{By}^2}}\right) = 1.34 \text{ m} \ .$$

1.3) Sempre partendo dall'equazione della traiettoria, si può determinare la ascissa corrispondente al vertice ($\hat{x}$) uguagliando a zero la derivata di $y(x)$. Deve essere, infatti,

$$y'(\bar{x}) = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} - \frac{g}{v_{Bx}^2}(\bar{x} - x_B) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = x_B + \frac{v_{By}v_{Bx}}{g}$$

che fornisce

$$y_{\max} = y(\bar{x}) = y_B + \frac{v_{By}^2}{2g} = 0.59 \text{ m} \ .$$

PROBLEMA N.2A

2.1) La condizione di equilibrio la si ottiene quando la forza della molla bilancia esattamente la forza peso, per cui

$$mg - kx_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = \frac{mg}{k} \ .$$

2.2) La coordinata della massa segue la legge oraria di un oscillatore armonico spostato intorno alla posizione di equilibrio x_0:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \varphi) \ , \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ ,$$

dove le costanti A e φ dipendono dalle condizioni iniziali. Nel nostro caso, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, da cui si ricava che la legge oraria è

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \ .$$

2.3) La tensione del filo è sempre uguale alla forza esercitata dalla molla, per cui la massima tensione (F_M) a cui esso è sottoposto durante l'oscillazione della massa corrisponde alla posizione di massimo allungamento della molla (x_M), per cui

$$F_M = kx_M = k\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\right) \ .$$

Affinché il filo non si spezzi, tale forza deve essere minore della tensione di rottura del filo, per cui

$$k\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\right) < T_{\max} \ ,$$

da cui, risolvendo per v_0 e ricordando le espressioni di x_0 e di ω, si ottiene

$$v_0 < v_0^{(\max)} = \frac{T_{\max} - mg}{\sqrt{km}} \ .$$