Esame di Fisica Generale I per Elettronici (Primo modulo)

Prova del 12 giugno 2001

Soluzioni dei problemi

PROBLEMA N.1B

1.1) Il corpo si muove lungo il piano inclinato soggetto all'azione della forza peso, della forza F e della forza d'attrito. La risultante delle forze lungo la direzione del piano inclinato ($F_{\|}$) è

$$F_{\|} = -mg\sin\alpha + F - \mu mg\cos\alpha \; .$$

Poiché tale forza è costante, il corpo si muoverà di moto uniformemente accelerato, con legge oraria

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{con} \qquad a = \frac{F_{\|}}{m} = \frac{F}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \; .$$

1.2) Detto t^* il tempo che il corpo impiega per percorrere la distanza L, deve essere

$$L = \frac{1}{2}a{t^*}^2 \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}} \; ,$$

e la condizione richiesta ($t^* \leq t_{\max}$) implica che

$$a \geq \frac{2L}{t_{\max}^2} \; .$$

Esplicitando l'espressione di a si ottiene da qui la condizione per μ:

$$\mu \leq \frac{1}{g\cos\alpha}\left(\frac{F}{m} - \frac{2L}{t_{\max}^2}\right) - \tan\alpha \; .$$

Naturalmente, il massimo valore di μ, richiesto dal problema, corrisponderà al membro di destra della precedente espressione, calcolato in corrispondenza del massimo valore che si può usare per F, cioè $F = T_{\max}$. Quindi si ha

$$\mu_{\max} = \frac{1}{g\cos\alpha}\left(\frac{T_{\max}}{m} - \frac{2L}{t_{\max}^2}\right) - \tan\alpha = 0.37 \; .$$

1.3) Per i valori ottenuti nel punto 2, si ha $t^* = t_{\max}$, per cui

$$L = \frac{1}{2}at_{\max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{2L}{t_{\max}^2}} \; ,$$

e quindi la velocità finale sarà

$$v_{\text{fin}} = at^* = \frac{2L}{t_{\max}} = 2 \text{ m/s} \; .$$

PROBLEMA N.2B

2.1) La condizione di equilibrio impone che la componente x della risultante delle forze agenti sulla massa sia nulla. Perciò, indicando con ℓ_1 e ℓ_2 le lunghezze delle due molle per una generica posizione della massa e con ϑ l'angolo che la prima molla forma con l'asse x, deve essere

$$F_x = -k\ell_1 \cos\vartheta_1 + k\ell_2 = 0 \ .$$

Indicando ora con ξ la proiezione di ℓ_1 sull'asse x (per cui $\ell_2 = 2d - \xi$), tale condizione significa che

$$-k\xi + k(2d - \xi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \xi = d \ ,$$

per cui la posizione di equilibrio è quella per cui $\xi = 2d - \xi = d$.

2.2) Per una generica posizione della massa, distante x dalla posizione di equilibrio, si ha

$$U(x) = \frac{1}{2}k\ell_1^2 + \frac{1}{2}k\ell_2^2$$

con

$$\ell_1^2 = h^2 + (d+x)^2 \ , \qquad \ell_2^2 = (d-x)^2 \ ,$$

per cui

$$U(x) = \frac{1}{2}k(h^2 + 2d^2) + kx^2 \ .$$

2.3) L'energia potenziale può essere scritta nella forma

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2}\alpha x^2 \ ,$$

con $\alpha = 2k$. La pulsazione delle oscillazioni sarà quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 4.47 \ \mathrm{rad/s} \ .$$

2.4) La reazione vincolare è tale da bilanciare la componente della forza delle molle ortogonale all'asse x, per cui

$$N = k\ell_1 \sin\vartheta = kh = 0.1 \ \mathrm{N} \ .$$