Esame di Fisica Generale I per Elettronici (Primo modulo)

Prova del 22 giugno 1999

Soluzioni dei problemi

PROBLEMA N.1

1. Dalla conservazione dell'energia meccanica (forze conservative):

$$\frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2}m_1\left[v_1^{(M)}\right]^2 + \frac{1}{2}m_2\left[v_2^{(M)}\right]^2$$

Dalla conservazione della quantità di moto (sistema isolato):

$$m_1 v_1^{(M)} = m_2 v_2^{(M)} \qquad \rightarrow v_2^{(M)} = \frac{m_1}{m_2}\, v_1^{(M)}$$

$$\Rightarrow v_1^{(M)} = (l_1 - l_0)\sqrt{\frac{k}{m_1\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)}}\,; \qquad v_2^{(M)} = (l_1 - l_0)\sqrt{\frac{k}{m_2\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)}}\,.$$

2. Equazione di Newton per la massa 1 (forza elastica):

$$m_1\ddot{x}_1 = -k\left[x_1 - (x_2 - l_0)\right]$$

Poiché la posizione del centro di massa non varia (sistema isolato), ponendo l'origine dell'asse x coincidente con il centro di massa del sistema:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \qquad \rightarrow x_2 = -\frac{m_1}{m_2}\, x_1$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)x_1 - \frac{kl_0}{m_1}$$

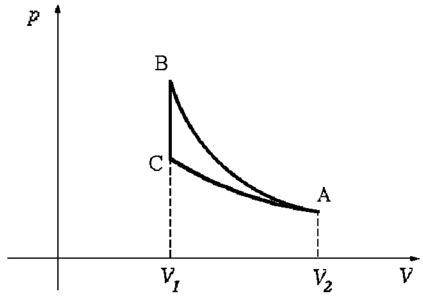
Questa coincide con l'equazione differenziale di un oscillatore armonico di pulsazione

$$\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}\,.$$

Lo stesso risultato si ottiene partendo dall'equazione del moto per la massa 2.

PROBLEMA N.2

Il gas compie il ciclo ABCA mostrato in figura



con AB = adiabatica; BC = isocora; CA = isoterma.

1. Il lavoro fatto dal gas (L') è dato dall'area (cambiata di segno) racchiusa dalla curva in figura. Il lavoro fatto dal pistone (sul gas) è dato da $L = -L'$. Per cui

$$L = -L' = -\left(L'_{\mathrm{AB}} + L'_{\mathrm{CA}}\right) = L_{\mathrm{BA}} - L_{\mathrm{CA}}$$

   Per l'adiabatica:

$$L_{\mathrm{BA}} = \int_{V_2}^{V_1} p\mathrm{d}V = p_1 V_1^{\gamma} \int_{V_2}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V^{\gamma}} = \frac{p_1 V_1}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

   Per l'isoterma:

$$L_{\mathrm{CA}} = \int_{V_2}^{V_1} p\mathrm{d}V = nRT \int_{V_2}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1 V_1 \log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\Rightarrow L = p_1 V_1 \left\{\frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] - \log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right\} = 134\ \mathrm{J}$$

2. Dal primo principio (poiché su un ciclo $\Delta U = 0$):

$$Q = L' = -L = -134\ \mathrm{J}$$

   Il segno meno indica che il gas cede calore all'ambiente esterno.