Test di esempio: Gruppo 4 - Soluzioni commentate

1. Il momento d'inerzia del sistema costituito dai due punti materiali è dato da $I = md^2 + M(2d)^2 = (m+4M)d^2$. Affinché un unico punto di massa $m+M$ abbia lo stesso momento d'inerzia, la sua distanza (D) dall'asse dovrebbe essere tale che $I = (m+M)D^2$. Quindi $(m+4M)d^2 = (m+M)D^2$, da cui $D = d\sqrt{(m+4M)/(m+M)}$. [b]

2. Le dimensioni di k sono N/m, e cioè (kg m/s^2)/m= kg/s^2, mentre quelle della quantità di moto sono kg m/s. In particolare, le dimensioni di $k\ell^2/v$ sono kg/s^2 $\times$ m^2/(m/s)=kg m/s. [b]

3. Indichiamo con m_1 e m_2 le masse dei due punti e prendiamo come sistema di riferimento un asse parallelo e concorde alla velocità di m_1. La velocità del centro di massa del sistema è $v_{\rm cm} = (m_1 v - m_2 v)/(m_1 + m_2)$, che deve essere pari a $v/2$. Quindi $(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) = 1/2$, da cui, con semplici passaggi, $m_1 = 3m_2$. [a]

4. Se la forza d'attrito tra pattini e ghiaccio è trascurabile, sul sistema costituito dai due pattinatori non agisce alcuna forza orizzontale. Questo implica che la componente orizzontale della quantità di moto del sistema deve rimanere costante o, equivalentemente, che la componente orizzontale della velocità del centro di massa deve rimanere costante. Quindi i pattinatori potranno interagire tra loro e le loro velocità potranno cambiare nel tempo ma, indicando con m e M (con $M > m$) le masse dei due pattinatori e con v e V le rispettive velocità, la velocità orizzontale del centro di massa, cioè $v_{\rm cm} = (mv + MV)/(m + M)$, non può cambiare. Se i due pattinatori erano inizialmente fermi, quando si spingono vicendevolmente ciascuno di essi accelera a causa della forza esercitata dall'altro (il principio di azione e reazione implica che la forza esercitata dal primo sul secondo è uguale, in modulo, alla forza esercitata dal secondo sul primo). Tuttavia, le loro velocità devono essere tali che $mv + MV = 0$, cioè $m = -(M/m)V$ (il segno meno indica che i due si muovono in versi opposti) e, in particolare, si ha $|v| = |(M/m)V| > V$. Quando cessa l'interazione tra i due pattinatori, questi non saranno più soggetti ad alcuna forza orizzontale e quindi continueranno il loro moto con velocità costante. [b]

5. Si può risolvere a partire dalla II equazione cardinale, cioè: $\tau = I\dot{\omega}$, dove τ è la risulante dei momenti assiali delle forza esterne applicate al corpo, I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione e $\dot{\omega}$ è la derivata temporale della velocità angolare. In questo caso, applicando la forza frenante di momento τ_F, il moto rotatorio del cilindro risulta decelerato, con accelerazione angolare costante $\dot{\omega} = -\tau_F/I$. In questa espressione, è stato evidenziato il segno negativo del momento assiale applicato, che deriva dall'aver considerato positiva la velocità angolare iniziale. L'espressione risultante per la velocità angolare ad un generico istante t è quindi $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}t$, che si annulla all'istante T tale che $\omega_0 + \dot{\omega}T = \omega_0 - (\tau_F/I)T = 0$, cioè $T = \omega_0 I/\tau_F$. Quindi $\tau_F = \omega_0 I/T$. [b]

6. Il lavoro necessario per fermare il cilindro è pari (dal teorema delle forze vive) alla sua energia cinetica di rotazione $E_c = (1/2)I\omega^2$. Tale energia cinetica può essere anche espressa in termini della velocità dei punti del mantello del cilindro perché $\omega = v/R$. Quindi l'energia cinetica di rotazione del cilindro vale $E_c = (1/2)I(v/R)^2$, dove I è il momento d'inerzia che, per un cilindro che ruota intorno al proprio asse, è $I = (1/2)MR^2$. In definitiva, il lavoro necessario a fermare il corpo è $E_c = (1/2)I(v/R)^2 = (1/2)(1/2)MR^2(v/R)^2 = (1/4)Mv^2$. [b]

7. La distanza di ognuno dei punti materiali dall'asse di rotazione è $d = a/\sqrt{2}$. Il momento di inerzia di ognuno di essi rispetto all'asse è $I_1 = md^2 = ma^2/2$, per cui il momento d'inerzia dell'insieme dei quattro punti vale $4I_1 = 2ma^2$. [c]

8. Si potrebbe rispondere al quesito calcolando esplicitamente il valore del momento d'inerzia della buccia cilindrica, che risulta essere $M(R_1^2 + R_2^2)/2$, con $R_1 = R$ e $R_2 = R/2$, e che quindi è maggiore di quello del cilindro avente lo stesso raggio esterno e uguale massa ($MR^2/2$). Tuttavia la risposta può essere data con un semplice ragionamento. Consideriamo un punto materiale di massa m che ruota intorno ad un certo asse, a distanza d da esso. Il momento d'inerzia di tale punto rispetto all'asse, md^2, è tanto maggiore quanto maggiore è la distanza d. Se pensiamo un cilindro omogeneo come un insieme di punti materiali discreti, il suo momento d'inerzia sarà dato dalla somma dei momenti d'inerzia di tutti i punti materiali che lo costituiscono. A parità di massa totale, e quindi a parità di numero di punti materiali, la buccia cilindrica può essere vista come il cilindro di prima, in cui però un certo numero di punti materiali è "migrato" dalla regione più vicina all'asse per trasferirsi in una zona più lontana. Certamente il loro momento d'inerzia, in questa nuova posizione, sarà maggiore di quello che avevano prima della migrazione. Pertanto il momento d'inerzia della buccia cilindrica sarà maggiore di quello del corrispondente cilindro di ugual massa. [a]

9. Detta d la più piccola delle due distanze, nel primo caso abbiamo $I = Md^2 + m(2d)^2 = (M+4m)d^2$. Scambiando le due masse tra loro si ha $I' = md^2 + M(2d)^2 = (m+4M)d^2$. Il rapporto I'/I vale quindi $(m+4M)/(M+4m)$. [c]

10. Nel processo descritto, l'energia potrebbe essere conservata, se l'energia cinetica finale della massa m fosse uguale all'energia potenziale iniziale della molla compressa. La forza peso non interviene in alcun modo perché è bilanciata dalla normale esercitata sui due corpi dal piano, che è peraltro liscio. Viceversa, il principio di azione e reazione impone che la forza esercitata dal primo corpo sul secondo sia uguale e contraria alla forza esercitata dal secondo sul primo. Pertanto se il primo corpo accelera in seguito all'azione del secondo, lo stesso dovrà fare il secondo, in direzione opposta, sotto l'azione del primo. I valori delle due accelerazioni saranno diversi se le due masse sono diverse. Detto in altri termini, se sul sistema composto dalle due masse e dalla molla non agisce alcuna forza esterna orizzontale (come nel caso in questione), la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema deve rimanere costante, ossia, se il centro di massa del sistema è inizialmente fermo, allora deve rimanere fermo. Ciò implica che, dette v e V le velocità finali dei due corpi, deve valere $mv + MV = 0$. Perciò, se $v \neq 0$ deve essere anche $V \neq 0$. [b]

11. Indichiamo con $\mathbf{v}$ il vettore velocità dei due punti che hanno la stessa velocità e con $\mathbf{v}'$ la velocità, incognita, del terzo punto. Poiché le tre masse sono uguali, la velocità del centro di massa risulta $(2\mathbf{v} + \mathbf{v}')/3$, che deve risultare pari a $2\mathbf{v}/3$. Risolvendo per $\mathbf{v}'$ si ottiene $\mathbf{v}' = 0$. Inoltre, affinché la velocità del centro di massa sia costante, è necessario che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema sia nulla e non c'è alcuna evidenza che il sistema sia sottoposto a forze esterne la cui risultante sia nulla. [a]

12. Fissando un sistema di riferimento cartesiano avente l'origine sul centro della circonferenza di raggio R, possiamo scrivere i vettori posizione dei tre punti in certo istante, per esempio quando il punto centrale transita per la posizione $\mathbf{r}_2 = (R, 0)$. Nello stesso istante gli altri due punti hanno, rispettivamente, coordinate $\mathbf{r}_1 = (0, R)$ e $\mathbf{r}_3 = (0, -R)$. Il raggio vettore del centro di massa del sistema risulta quindi $(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3)/(m_1 + m_2 + m_3) = [(0, R) + (R, 0) + (0, -R)]/3 = (R/3, 0)$ e quindi il centro di massa si trova sull'asse x, a distanza $R/3$ dall'origine. Quando i tre punti ruotano, il centro di massa ruota con la stessa velocità angolare, mantenendo costante la distanza dall'origine. [c]

13. L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche dei due punti materiali, che possono essere calcolate a partire dai valori delle masse e delle velocità dei due punti. Ma non è possibile risalire ai valori delle velocitá dei due punti conoscendo solo la velocità del loro centro di massa. Basti pensare che, nel caso in questione, il centro di massa ha sicuramente velocità nulla quando i due punti hanno velocità uguali ed opposte, indipendentemente dal valore del loro modulo. [c]

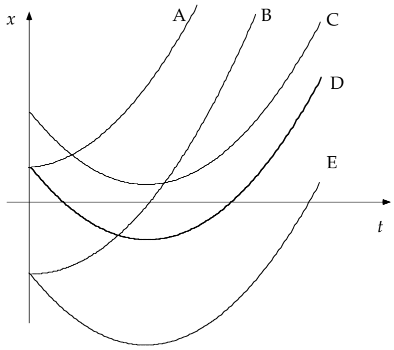
14. Una maniera per trovare la risposta consiste nel calcolare il momento d'inerzia (I) del sistema come per il test 7, e ricordare che l'energia cinetica di rotazione, alla velocità angolare ω, vale $E_c = (1/2)I\omega^2$. Dal risultato del test 7 risulta quindi $E_c = ma^2\omega^2$. Un altro modo, perfettamente equivalente, consiste nel calcolare le energie cinetiche dei quattro punti materiali e sommarle tra loro. In particolare, poiché i quattro punti ruotano a distanza $d = a/\sqrt{2}$ dall'asse, la loro velocità tangenziale è $v = \omega\, d = \omega\, a/\sqrt{2}$, e quindi la energia cinetica di ciascuno di essi è $(1/2)mv^2 = (1/4)m\,\omega^2\, a^2$. Questo valore, moltiplicato per 4, dà $E_c = m\,\omega^2\, a^2$. [b]

15. Fissiamo un asse x parallelo al segmento e avente origine coincidente con la coordinata del più leggero tra i punti materiali. La coordinata del centro di massa del sistema risulta quindi pari a $x_{\mathrm{CM}} = (m \cdot 0 + 2m \cdot D + 3m \cdot 2D + 4m \cdot 3D)/(m + 2m + 3m + 4m) = 20mD/(10m) = 2D$. [b]

16. In base alla legge della gravitazione universale, un corpo di massa m che si trovi a distanza d dal centro della Terra risente di una forza attrattiva avente modulo pari a GMm/d^2, dove G è la costante di gravitazione universale e M è la massa della Terra. Se il corpo si trova in prossimità della superficie terrestre, la sua distanza dal centro della Terra può essere approssimata col raggio terrestre R, per cui la forza gravitazionale si può scrivere come $GMm/R^2 = gm$, dove la costante g vale GM/R^2. [a]

17. Il lavoro necessario per comprimere una molla della quantità x è pari (in modulo) al lavoro compiuto dalla molla nella compressione, e cioè $L = kx^2/2$. Se la compressione fosse di $2x$, sarebbe necessario il lavoro $L' = k(2x)^2/2 = 4kx^2/2 = 4L$. [b]

18. Dal punto di vista analitico, significa che la legge oraria $x(t)$ si deve annullare due volte, e sempre in corrispondenza di valori positivi della variabile t. Si può quindi arrivare alla soluzione scrivendo esplicitamente le soluzioni dell'equazione $x_0 + v_0 t + (1/2)at^2 = 0$, e discutendone la realtà e il segno. Oppure, più semplicemente, analizzando graficamente gli andamenti che si ottengono per diversi valori di x_0 e v_0. Infatti, la parabola che rappresenta il moto del punto nel piano (t, x) deve intercettare due volte l'asse t e i valori delle intercette devono essere entrambi positivi. In figura sono mostrati alcuni di questi andamenti. Si vede che, avendo $a > 0$, per avere due soluzioni positive bisogna escludere i casi per cui la velocità iniziale è positiva (curve A e B) e quelli per cui x_0 è negativa (curva E). In definitiva, condizione *necessaria* per avere due soluzioni positive è che siano, simultaneamente, $v_0 < 0$ e $x_0 > 0$. Tale condizione *non* è anche *sufficiente*, come si vede dalla curva C. [a]



19. Si può applicare il teorema degli assi paralleli (teorema di Huygens-Steiner), per cui $I' = I + Md^2$, dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria e I' è quello rispetto ad un asse parallelo al primo e distante d da esso. Nel caso in questione il corpo è un cilindro di massa M e raggio R, per cui $I = (1/2)MR^2$. La distanza del nuovo asse di rotazione rispetto all'asse del cilindro è $d = R/2$ per cui, dal teorema degli assi paralleli, $I' = (1/2)MR^2 + M(R/2)^2 = (1/2 + 1/4)MR^2 = (3/4)MR^2 = (3/2)I$. [c]

20. Il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori è proporzionale al modulo del seno dell'angolo (θ) compreso tra i due vettori. Esso pertanto è nullo se i due vettori sono paralleli ($\theta = 0$) o antiparalleli ($\theta = \pi$). [c]