Test di esempio: Gruppo 3 - Soluzioni commentate

1. L'equazione descrive un moto uniformemente decelerato con accelerazione pari a 12 m/s^2. In paricolare la velocità segue la legge $v(t) = 4 - 12t$ e quindi, partendo dal valore di 4 m/s, si annulla in un tempo $T = 1/3$ s. Dopo tale tempo, secondo la legge oraria fornita, la velocità dovrebbe cambiare segno e quindi il verso del moto dovrebbe invertirsi. Ciò è in contraddizione con l'assunto iniziale che il corpo si muove su un piano orizzontale ed interagisce solo col piano di appoggio, scabro, e con la Terra. Questo condizioni, infatti, implicano che la reazione normale del piano è diretta verticalmente e bilancia la forza peso, mentre l'unica forza orizzontale (responsabile della decelerazione) è la forza di attrito, che però si annulla quando il corpo è fermo. [c]

2. Poiché il moto è circolare (sebbene non uniforme, vedi test 12 del Gruppo 2) la componente normale della forza totale agente sul corpo (F_n) deve essere uguale a mv^2/R, con ovvio significato dei simboli. In questo caso, F_n è data dalla somma della tensione del filo (T), che è diretta sempre ortogonalmente alla traiettoria, e dalla componente normale della forza peso ($P = mg$), che ha generalmente componenti lungo entrambe le direzioni. In particolare, nella posizione corrispondente alla quota massima, anche la forza peso è diretta lungo la normale alla traiettoria e F_n vale $P+T$, per cui la tensione in questo punto vale $T = mv^2/R - P = mv^2/R - mg$. Come si vede, la tensione dipende dalla velocità del corpo nel punto considerato ed esiste un valore minimo della velocità per cui la tensione del filo risulta positiva (cioè diretta verso il centro della traiettoria) che è $v_{\rm min} = \sqrt{gR}$. Per valori della velocità minori di $v_{\rm min}$, la tensione dovrebbe essere negativa (e cioè il filo dovrebbe *spingere*) per far sì che il corpo si muova lungo la circonferenza. Per sua natura, un filo non può esercitare una simile reazione (mentre, per esempio, potrebbe farlo una sbarretta rigida). [b]

3. Prendendo per sistema di riferimento un asse x, orientato come il segmento e avente l'origine in corrispondenza della massa M, risulta che la coordinata del centro di massa del sistema vale $x_{\rm cm} = Dm/(m + M)$. Poiché, per come è stato scelto il sistema di riferimento, questa deve trovarsi alla coordinata $D/4$, deve verificarsi che $m/(m + M) = 1/4$. Risolvendo per m, si ha $m = M/3$, da cui $m/M = 1/3$. [a]

4. Le dimensioni di G possono essere dedotte dalla legge di gravitazione universale: $F = GMm/d^2$, per cui $[G] =$ N m^2 kg^{-2}, mentre quelle del lavoro L sono N m. La quantità $(\ell L/G)^{1/2}$ perciò ha dimensioni: [m (N m) N^{-1} m^{-2} kg^2]$^{1/2}$ = kg. [b]

5. Il raggio di curvatura (R) in un punto di una traiettoria può essere espresso mediante l'accelerazione normale (a_n) e il modulo della velocità in quel punto (v): $R = v^2/a_n$. A sua volta, l'accelerazione normale è legata alla componente normale della forza totale agente sul punto (indicata con F nel testo) dal II principio della dinamica: $F = ma_n$, per cui $F = mv^2/R$. Risolvendo per v si ha $v = \sqrt{RF/m}$. [a]

6. Una molla di costante elastica k esercita una forza di modulo pari a kL quando la sua deformazione è L. Il lavoro corrispondente a tale deformazione è $(1/2)kL^2 = (1/2)\ kL\ L = (1/2)FL$. [a]

7. Dal teorema delle forze vive, il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico F_A (che in questo caso è l'unica forza che compie lavoro) è pari alla variazione dell'energia cinetica del corpo. La forza di attrito è $F_A = -\mu N = -\mu mg$, mentre, poiché la velocità finale del corpo è nulla, la variazione di energia cinetica è $-(1/2)mv_0^2$. Pertanto: $-\mu mgL = -(1/2)mv_0^2$, da cui $v_0 = \sqrt{2\mu gL}$. [a]

8. Si può utilizzare il teorema delle forze vive. Come istante iniziale si considera l'istante in cui il punto viene lanciato (posizione A, velocità v_0), mentre come istante finale quello in cui in cui esso ritorna al suolo (ancora posizione A, velocità $v_0/2$). Durante l'intero percorso, la forza peso compie globalmente un lavoro nullo e l'unica forza che compie un lavoro non nullo è la forza di attrito F. Se d è il tratto percorso durante la fase di salita, il lavoro totale è quindi $L = -2Fd$ (perché il lavoro compiuto dalla forza di attrito è negativo sia nella fase di saltita che in quella di discesa, a differenza di quello della forza peso, che è negativo nella fase di salita e positivo nella fase di discesa). D'altro canto, la corrispondente variazione di energia cinetica è $\Delta E_c = (1/2)m(v_0/2)^2 - (1/2)mv_0^2 = -(3/8)mv_0^2$ per cui, dal teorema delle forze vive, $-2Fd = -(3/8)mv_0^2$, da cui $d = (3/16)mv_0^2/F$. [b]

9. Circa la relazione tra tensione del filo (T), forza peso (P) e velocità del corpo (v), valgono le considerazioni fatte a proposito del test 2. Però in questo caso il punto della traiettoria considerato e quello più basso. Anche per questo punto la forza peso è diretta lungo la direzione normale alla traiettoria, ma punta in verso opposto rispetto alla tensione del filo, per cui la forza normale vale $F_n = T - P$. La tensione del filo può essere calcolata, conoscendo la velocità del punto, dal II principio delle dinamica: $F_n = mv^2/R \Rightarrow T = P + mv^2/R$. Bisogna calcolare v. Questo può essere fatto col teorema delle forze vive, considerando che l'unica forza che compie lavoro

in questo caso è la forza peso e che il lavoro compiuto dalla forza peso dipende solo dalla differenza di quota tra posizione iniziale e posizione finale. Poiché la differenza di quota è proprio pari al raggio della traiettoria, il lavoro totale compiuto sul corpo è mgR. D'altro canto, la variazione di energia cinetica è $(1/2)mv^2$, perché il corpo parte da fermo, e quindi dal teorema delle forza vive si deduce che $v^2 = 2gR$. Utilizzando ora la relazione, ricavata in precedenza, che fornisce la tensione del filo, si ha $T = P + 2mg = 3P$. [c]

10. Per sollevare la massa m per una quota h, bisogna compiere un lavoro uguale, o maggiore (in modulo), a quello compiuto dalla forza peso, che è mgh. Bisogna stimare la massa di un mattone e la quota corrispondente al quinto piano di una casa. La prima è dell'ordine di qualche chilogrammo, diciamo 2 kg, mentre la seconda, considerando 3 metri per ogni piano, è dell'ordine di 15 m. Il lavoro richiesto è quindi dell'ordine di $2 \cdot 10 \cdot 15$ J =300 J. Per valori ragionevoli di m e di h, diversi da quelli utilizzati, il valore più vicino è sempre quello corrispondente alla risposta [c].

11. Se un corpo si muove di moto circolare uniforme, la risultante delle forze applicate, qualunque sia la loro natura, deve essere diretta verso il centro delle traiettoria e deve avere modulo pari a mv^2/R. [c]

12. L'energia meccanica del punto coincide con la sua energia cinetica massima (corrispondente al minimo dell'energia potenziale, che è nulla quando il corpo transita per il punto di equilibrio) o, equivalentemente, con la sua energia potenziale massima (corrispondente al minimo dell'energia cinetica, che è nulla quando il corpo ha velocità nulla). L'energia meccanica è quindi uguale a $E = (1/2)kA^2$. La costante elastica k non viene data, ma viene dato il valore della forza elastica massima (F). Tale forza viene esercitata in corrispondenza della massima distanza dalla posizione di equilibrio, che è A, per cui $F = kA \Rightarrow k = F/A$. Utilizzando questo valore di k, risulta $E = (1/2)FA = (1/2) \cdot 300 \cdot 0.05$ J = 7.5 J. [b]

13. Condizione necessaria perché un corpo si muova di moto rettilineo uniforme è che la risultante delle forze ad esso applicate sia nulla. Nel caso in questione, questo significa che la forza di attrito viscoso uquaglia esattamente (in modulo) la forza applicata al corpo. [b]

14. Per un generico spostamento dalla posizione di equilibrio (diciamo x), entrambe le molle esercitano una forza elastica che cerca riportare la massa nella posizione di equilibrio. Le due forze sono dirette nella stesso verso, per cui la forza totale esercitata sul corpo è pari a $-(k_1 + k_2)x$ e corrisponde alla forza che eserciterebbe una singola molla avente costante elastica $k = k_1 + k_2$. Se il corpo viene spostato della quantità D dalla posizione di equilibrio e poi lasciato, esso seguirà un moto armonico di pulsazione $\sqrt{k/m}$ e ampiezza D. La massima energia cinetica che acquisterà durante il moto sarà pari all'energia potenziale iniziale, cioè $(1/2)kD^2$. [a]

15. Se non fossero presenti forze di attrito, la velocità acquistata dal ciclista sarebbe pari a $\sqrt{2gh}$, come si deduce dal teorema delle forza vive e dal fatto che il lavoro compiuto dalla forza peso è $L_P = mgh$. La velocità effettiva del ciclista ($v = \sqrt{gh}$) è minore di questa, indicando la presenza di forze di attrito. Il lavoro compiuto da queste forze (L_A) può essere calcolato dal teorema delle forza vive, per cui $L_P + L_A = (1/2)mv^2 = (1/2)mgh$. Il lavoro compiuto dalle forze resistenti è quindi $L_A = (1/2)mgh - L_P = -(1/2)mgh$. Il suo valore, in modulo, può essere calcolato stimando la massa del ciclista. Per esempio, se $m \simeq 80$ kg, si ma $|L_A| \simeq (1/2) \cdot 80 \cdot 10 \cdot 10$ J = 4000 J. [b]

16. La potenza si può esprimere mediante il prodotto della forza applicata moltiplicata scalarmente per la velocità con cui si muove il punto di applicazione della forza. Nel caso in questione, indichiamo con θ l'angolo che la strada forma con l'orizzontale. La forza che si deve applicare all'automobile, nella direzione del moto, affinché essa si muova di moto uniforme è, trascurando ogni forma di attrito, pari alla componente della forza peso parallela al piano stradale, e cioè $mg \sin\theta$. Quindi la potenza necessaria risulta semplicemente $P = mgv \sin\theta$. Il valore della pendenza indicato in percentuale esprime di quanti metri sale la quota per ogni 100 m di distanza percorsa. Diviso per 100, tale valore coincide con il seno dell'angolo θ definito sopra. Con i valori forniti, risulta $P \simeq 1000 \cdot 10 \cdot (90/3.6) \cdot 0.1$ W =25 kW. [c]

17. La massima forza di attrito statico che una superficie può esercitare su un corpo con cui è in contatto è proporzionale alla reazione normale (N) che la superficie esercita sul corpo. Il valore di tale reazione dipende da tutte le altre forze applicate al corpo (non solo dalla forza peso!) ed è tale da annullare la componente ortogonale alla superficie della risultante di tutte le forze. Se la superficie è orizzontale e al corpo viene applicata una forza orizzontale, la reazione normale deve equilibrare solo la forza peso del corpo. In particolare, se il corpo non si muove, significa che la forza di attrito è esattamente uguale alla forza applicata e che è minore della forza di attrito massimo che la superficie può esercitare. Inclinando verso l'alto la forza applicata (dell'angolo θ rispetto all'orizzontale), la componente della forza parallela alla superficie diminuisce (perché diventa $F \cos\theta$) e quindi

diminuisce anche la forza di attrito necessaria per mantenere il corpo in equilibrio nella direzione orizzontale. Nello stesso tempo, però, la componente di F perpendicolare alla superficie aumenta (passa da zero a $F \sin\theta$) e quindi diminuisce la reazione normale N necessaria per mantenere il corpo in equilibrio nella direzione verticale. Ciò comporta che la forza di attrito massimo che la superficie può esercitare diminuisce, e può succedere che questa risulti minore della componente orizzontale della forza applicata. In questo caso, il corpo si muove. L'unica risposta corretta è la [b].

18. La risultante ($\mathbf{F}^{(\mathrm{est})}$) delle forze esterne applicate ad un sistema di punti materiali è legata all'accelerazione del centro di massa del sistema ($\mathbf{a}_{\mathrm{cm}}$) dalla relazione $\mathbf{F}^{(\mathrm{est})} = M\,\mathbf{a}_{\mathrm{cm}}$, dove M è la massa totale del sistema. La legge oraria indicata nel testo indica che il centro di massa si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione pari a 12 m/s^2, per cui la risultante delle forze esterne deve essere costante e deve valere, in modulo, $F^{(\mathrm{est})} = M\,a_{\mathrm{cm}} = 3 \cdot 12\ \mathrm{N} = 36\ \mathrm{N}$. [a]

19. Il pendolo si muove lungo una circonferenza e la tensione del filo è sempre ortogonale alla velocità del pendolo. Poiché nella definizione di lavoro entra in gioco soltanto la componente della forza nella direzione dello spostamento (e cioè della velocità), questo implica che il lavoro compiuto dalla tensione del filo è sempre nullo. [c]

20. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forza *unidimensionale* (cioè dipendente da una sola coordinata spaziale, per esempio x), F, sia conservativa è che essa dipenda *soltanto* dalla coordinata spaziale (e, per esempio, non dipenda dalla velocità, come succede per le forze di attrito). In questo caso è possibile definire l'energia potenziale in una generica posizione x come il lavoro, cambiato di segno, compiuto dalla forza nello spostamento del suo punto di applicazione da una coordinata presa come riferimento (x_0) alla coordinata x. Matematicamente, questo equivale a calcolare l'integrale da x_0 a x di $F(x)$ e cambiare di segno. Nel caso proposto, $F(x) = Cx^2$, con C costante, per cui la procedura illustrata fornisce il risultato della risposta [a].