Test a Risposta Multipla: Esempio3
- Soluzioni Commentate ($1 \div 25$) -

1. Indichiamo le dimensioni fisiche di una grandezza con il simbolo che rappresenta la grandezza stessa racchiuso tra parentesi quadre. Le dimensioni delle costante G possono essere ricavate direttamente dalle legge di gravitazione universale, da cui risulta che $G = Fd^2/(m_1 m_2)$, dove F è una forza, d una distanza e m_1 e m_2 sono masse, per cui $[G]$ =Nm^2/kg^2. D'altro canto, le dimensioni della costante elastica k si ricavano dalla legge di Hooke e quindi $[k]$ =N/m. Pertanto, le dimensioni di $(Gm^2/k)^{1/3}$ sono $[\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2\times\ \mathrm{kg}^2\times(\mathrm{m}/\mathrm{N})]^{1/3}$ = m, e si tratta quindi di una lunghezza. [a]

2. Le dimensioni di v sono m/s. Quelle di ℓ sono m, e quelle di a sono m/s^2. Quindi le dimensioni di $v^2/(\ell a)$ sono $(\mathrm{m/s})^2 \times (1/\mathrm{m}) \times (\mathrm{s}^2/\mathrm{m}) = 1$, per cui si tratta di un numero puro. [c]

3. Le unità di misura del lavoro sono Nm = kg$\times$m/s$^2\times$m = kg$\times$(m/s)^2. L'unica soluzione che fornisce una grandezza avente le dimensioni di una velocità è la [b].

4. La Terra ruota intorno al proprio asse con una velocità angolare tale da farle compiere un giro completo in un periodo T pari a 24 ore, cioè 86400 s. Detta Ω tale velocità angolare, si ha $\Omega = 2\pi/T$. I punti sulla superficie terrestre si muoveranno tutti con la stessa velocità angolare (perché il periodo di una rotazione è lo stesso per tutti), ma lungo traiettorie circolari, il cui raggio dipende dalla latitudine. In particolare, per un punto che si trova sull'Equatore, il raggio dell'orbita coincide con il raggio terrestre ($R \approx 6.4 \cdot 10^6$ m). La sua velocità è pertanto
$$v = \Omega R = \frac{2\pi}{T} R \approx 500 \text{ m/s. [b]}$$

5. Se si trascura la resistenza dell'aria, la velocità di un grave in caduta libera non dipende dalla sua massa. Bisogna quindi stimare la velocità che un corpo raggiunge, partendo da fermo, essendo accelerato per un tratto di lunghezza h, con accelerazione costante e pari a g. In particolare, si può calcolare facilmente [per esempio attraverso la relazione generale, valida per un punto che si muove di moto uniformemente accelerato: $2a(x_2 - x_1) = v_2^2 - v_1^2$] che $v_{\text{fin}} = \sqrt{2gh}$. L'altezza non viene data, ma può essere stimata dai dati del problema: considerando che l'altezza media di ogni piano di un condominio è dell'ordine di 3 m, un oggetto che si trovi al terzo piano è ad una quota dal suolo di circa 10 m. Pertanto
$$v_{\text{fin}} \simeq \sqrt{2 \times 10 \times 10} \text{ m/s} = 14.1 \text{ m/s} = 14.1 \times 3.6 \text{ km/h} \simeq 50 \text{ km/h. [c]}$$

6. La velocità è una grandezza vettoriale, caratterizzata da un modulo, una direzione ed un verso. Il fatto che il suo modulo rimanga costante non significa che "la velocità" è costante, e quindi che l'accelerazione è nulla. Anche l'accelerazione è un vettore, che può essere rappresentato, in ogni punto, attraverso le proprie componenti lungo le direzioni parallela e ortogonale alla tangente geometrica della traiettoria in quel punto (chiamate rispettivamente accelerazione *tangenziale* e accelerazione *normale*, o *centripeta*). In particolare, l'accelerazione tangenziale dipende dalle variazioni del modulo della velocità e quindi è nulla se il punto si muove con velocità costante in modulo, come nel caso in questione. Viceversa, l'accelerazione centripeta dipende dalle variazioni della direzione del vettore velocità e quindi può essere non nulla anche se la velocità si mantiene costante in modulo. Ovviamente, il fatto che la velocità abbia modulo costante non implica che la traiettoria sia rettilinea. La risposta giusta è la [b].

7. Calcoliamo la velocità e l'accelerazione corrispondenti alla legge oraria data:
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2B(t - T)\,; \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2B\,.$$
Si vede immediatamente che la velocità varia linearmente col tempo, per cui non è costante in modulo. Inoltre, l'accelerazione è costante e non si annulla mai (perché $B \neq 0$). Viceversa, è altrettanto evidente che la soluzione corretta è la seconda perché $x(t) \geq 0$ $(\forall t)$, che significa appunto che il moto si svolge nel semiasse positivo delle x. [b]

8. Se si trascura la resistenza dell'aria, la velocità di un grave, sottoposto alla sola forza di attrazione gravitazionale, non dipende dalla sua massa. Pertanto i parametri della sua traiettoria, parabolica, dipendono esclusivamente dai valori iniziali di posizione e velocità. Se i due sassi compiono traiettorie differenti, essi sono stati lanciati in maniera differente. [c]

9. A meno che il sasso non venga lanciato verso l'alto esattamente in verticale, la sua velocità nel vertice della traiettoria *non* sarà nulla. Infatti, nel vertice della traiettoria si annulla sempre la componente verticale della velocità ma, in generale, non quella orizzontale. Pertanto, nel vertice della traiettoria il modulo della velocità coinciderà con il modulo della sola componente orizzontale. Quest'ultima, a sua volta, rimane esattamente costante durante il moto e quindi è uguale alla componente orizzontale della velocità iniziale, che, nel caso in questione, vale $v_{0x} = v_0 \cos\theta = v_0/2 = 3$ m/s. [c]

10. La velocità di un punto nello spazio bi- o tridimensionale è definita come la derivata rispetto al tempo del suo vettore posizione $\mathbf{r}(t)$, e quindi

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \, ,$$

dove $\Delta\mathbf{r}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo compiuto dal punto nell'intervallo di tempo Δt. E' quindi chiaro che la direzione e il verso del vettore $\mathbf{v}$ coincidono con quelli di $\Delta\mathbf{r}$, nel limite in cui $\Delta t \to 0$. Poiché, in questo limite, il vettore spostamento $\Delta\mathbf{r}$ è diretto lungo la tangente geometrica della curva che individua la traiettoria, la direzione di $\mathbf{v}$ in ogni punto coincide con la tangente alla traiettoria in quel punto, mentre il suo verso indica il verso di percorrenza della traiettoria. Ciò significa, in particolare, che non esiste, per definizione, alcuna componente della velocità nella direzione normale alla traiettoria. [c]

11. Si potrebbe risolvere il problema considerando il moto del punto scomposto in due fasi: la prima, da $t = 0$ a $t = t_0$, di moto uniformemente accelerato, con velocità che varia linearmente da 0 a v_0; la seconda, da $t = t_0$ a $t = t_1$, di moto uniforme con velocità v_0. Lo spazio percorso potrebbe essere calcolato come la somma delle distanze percorse nelle due fasi del moto. Tuttavia, una maniera più semplice consiste nell'utilizzare l'espressione che consente di esprimere la coordinata spaziale al generico istante t, in un moto vario, attraverso l'integrale della funzione $v(t)$. In particolare si ha

$$x(t_1) = x(0) + \int_0^{t_1} v(t)\, \mathrm{d}t \, ,$$

e quindi l'integrale che compare in questa espressione rappresenta proprio lo spazio persorso dall'istante iniziale a quello finale. Esso può essere calcolato molto facilmente, semplicemente valutando l'area che è sottesa dalla funzione $v(t)$ nel relativo grafico. In questo caso si tratta di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore pari a t_1, base minore pari a $(t_1 - t_0)$ e altezza pari v_0. Lo spazio percorso è quindi

$$x(t_1) - x(0) = \frac{[t_1 + (t_1 - t_0)]v_0}{2} = 200 \text{ m} \, . \text{ [c]}$$

12. La forza di attrito statico agente su un corpo assume un valore dipendente dalle altre forze che stanno agendo sul corpo. Il suo valore è tale da annullare la risultante delle forze agenti sul corpo e quindi da garantire l'equilibrio statico del corpo stesso. La quantità $\mu_s N$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico e N la reazione normale del piano, rappresenta solo il valore *massimo* che la forza di attrito statico può assumere e, in generale, *non* coincide col valore della forza di attrito. Nel caso in questione, se la cassa fosse su un piano orizzontale e se l'uomo stesse applicando su di essa la forza, in direzione orizzontale, di 5 N, effettivamente la forza di attrito sarebbe di -5 N. In tal modo la risultante delle forze agenti sulla cassa sarebbe nulla e la cassa non si metterebbe in moto. Non appena l'uomo cessasse di tirare a sé la cassa, però, anche la forza di attrito verrebbe a cessare e non potrebbe in alcun modo mettere in moto la cassa. Riguardo al principio di azione e reazione, è sufficiente ricordare che le coppie azione-reazione sono sempre applicate a corpi *diversi*. Per esempio, nel caso presente la forza uguale e opposta a quella esercitata dall'uomo sulla cassa è quella esercitata dalla cassa sull'uomo (e che, a sua volta, è probabilmente bilanciata dalla forza di attrito che si esercita tra il piano e le scarpe dell'uomo). In ogni caso, non può essere responsabile del moto della cassa. Una possibile causa del comportamento della cassa è il seguente. La cassa si trova su un piano inclinato e l'uomo sta esercitando la forza di 5 N tentando di non far scivolare la cassa. In questa situazione, la forza di attrito necessaria per annullare le risultante delle forze agenti sulla cassa è minore della forza che sarebbe necessaria se non ci fosse l'intervento dell'uomo e, se la cassa rimane in equilibrio, evidentemente tale forza è minore della forza di attrito massimo che il vincolo può esercitare ($\mu_s N$). Quando l'uomo smette di tirare a sé la cassa, la forza di attrito dovrebbe invece bilanciare, da sola, la componente della forza peso diretta nella direzione del piano inclinato. Evidentemente questo nuovo valore è maggiore di $\mu_s N$, per cui la cassa comincia a scivolare. [b]

13. Il punto materiale, di massa m, compie un moto circolare su una circonferenza di raggio $R = 0.4$ m con velocità v. Poiché il piano su cui si svolge il moto è orizzontale e il punto è trattenuto da un filo, l'unica forza agente sul punto che può essere responsabile della sua accelerazione centripeta (perché è diretta verso il centro della traiettoria) è proprio la tensione del filo, che quindi deve valere $T = mv^2/R$. Tale valore deve essere minore del carico di rottura del filo ($T_{\max} = 9$ N), per cui $v \leq v_{\max} = \sqrt{RT_{\max}/m}$. La frequenza di rotazione (f) del punto è direttamente legata alla sua velocità, perché $v = \omega R = 2\pi f R$. In definitiva, $f_{\max} = v_{\max}/(2\pi R) = \sqrt{T_{\max}/(Rm)}/(2\pi) \simeq 1\ \mathrm{s}^{-1}$. [c]

14. Si può rispondere procedendo per esclusione. Infatti, solo le risposte [a] e [b] sono corrette dal punto di vista dimensionale (la [c] fornisce una quantità che ha le dimensioni di una forza). Inoltre, la risposta [a] fornisce un valore che diverge quando le due masse sono uguali tra loro. L'unica risposta verosimile è pertanto la [b].

15. Dire che il grafico dell'accelerazione (a) in funzione della coordinata x è una retta giacente nel secondo e quarto quadrante significa che $a = -bx$, con b costante positiva. Si riconosce subito che questo è proprio il caso di una forza elastica (per cui la forza è proporzionale alla coordinata spaziale, misurata rispetto alla posizione di equilibrio, con coefficiente di proporzionalità negativo). Viceversa, nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante, mentre in presenza di attrito viscoso essa è dipendente dalla velocità. [b]

16. Questa è un'equazione differenziale della stessa forma di quella dell'oscillatore armonico. L'unica differenza è che la grandezza a è considerata una funzione della variabile x e la derivata è fatta rispetto a x. Se x rappresenta una coordinata spaziale e a un'accelerazione, B deve avere le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Comunque, indipendentemente dal suo significato fisico e dalle sue dimensioni, la soluzione dell'equazione differenziale si potrà scrivere nella forma $a(x) = a_M \sin(Bx + c)$, con a_M e c costanti dipendenti dalle condizioni iniziali, come si può anche verificare facilmente calcolandone la derivata seconda rispetto a x. Quindi l'equazione ha perfettamente senso, anche se la derivata non è fatta rispetto al tempo. Inoltre, nel caso di di un grave sottoposto ad una forza elastica, la dipendenza dell'accelerazione dalla coordinata spaziale sarebbe del tipo $a(x) = -\omega^2 x$, e quindi si avrebbe $a'' = 0$. [a]

17. In base al terzo principio della dinamica, il satellite attira la Terra con una forza che è esattamente uguale, in modulo, alla forza con cui la Terra attira il satellite. Inoltre, il valore mg per la forza di attrazione gravitazionale è un valore approssimato, che vale solo in prossimità della superficie terrestre (cioè quando il corpo si trova ad un'altitudine che è molto minore del raggio terrestre) e quindi potrebbe non essere corretto per un satellite. Viceversa, in base al secondo principio della dinamica, l'accelerazione centripeta uguaglia la forza centripeta divisa per la massa del corpo, cioè $a = F/m = 2400/400\ \mathrm{m/s^2} = 6\ \mathrm{m/s^2}$. [c]

18. L'equazione semplicemente non ha senso, perché è sbagliata dal punto di vista dimensionale. Il membro di sinistra è una velocità mentre quello di destra ha le dimensioni di una lunghezza. [b]

19. Poiché il moto del pendolo è circolare (sebbene non uniforme), la componente normale della forza totale agente su di esso (F_n) deve essere in ogni punto uguale a mv^2/R, con ovvio significato dei simboli. In questo caso, F_n è data dalla somma della tensione del filo (T), che è diretta sempre ortogonalmente alla traiettoria, e della componente normale della forza peso ($P = mg$), che ha generalmente componenti lungo entrambe le direzioni. In particolare, nella posizione corrispondente alla quota minima, anche la forza peso è diretta lungo la normale alla traiettoria (ma in verso opposto rispetto alla tensione del filo) e quindi F_n vale $T - P$, per cui la tensione in questo punto vale $T = P + mv^2/R$. Come si vede, la tensione del filo dipende dalla velocità del corpo, ma è comunque sempre maggiore della forza peso. [a]

20. Ogni qual volta un punto materiale si muove con velocità costante in modulo, la sua accelerazione tangenziale è nulla, qualsiasi sia la sua traiettoria. In particolare, nel caso in questione la risultante delle forze tangenziali alla traiettoria è nulla, mentre la risultante delle forze normali alla traiettoria è costante e vale mv^2/R. Se, viceversa, avessimo voluto calcolare le componenti tangenziale e normale della *sola* forza peso, avremmo ottenuto $mg\cos\vartheta$ e $mg\sin\vartheta$. Il fatto che il corpo si muova con velocità *costante* in modulo significa che su di esso agiscono anche altre forze, che annullano la componente tangenziale della forza totale e ne rendono costante la componente normale. Questo significa, in particolare, che il corpo non può essere tenuto sulla traiettoria circolare solo da un filo ideale, perchè questo, esercitando una tensione diretta ortogonalmente alla traiettoria, non potrebbe bilanciare la componente tangenziale della forza peso. [b]

21. Secondo il terzo principio della dinamica, se la Terra attira un corpo con la forza $\mathbf{F}$, il corpo attira a sé la Terra con una forza esattamente uguale in modulo e diretta in verso opposto, cioè la forza gravitazionale esercitata dal corpo sulla Terra è esattamente $-\mathbf{F}$. Poiché un uomo di massa pari a 80 kg viene attirato dalla Terra con una forza di circa 800 N, tale è anche la forza esercitata dall'uomo sulla Terra. [a]

22. Per risolvere il problema si può ragionare nel seguente modo. Consideriamo dapprima le due masse legate dal filo come un unico sistema di massa $m = m_1 + m_2$. La forza totale esercitata dall'esterno sul sistema è data proprio dalla forza $\mathbf{F}$, diretta verso destra lungo l'asse orizzontale. In base al secondo principio della dinamica, il sistema si muoverà quindi verso destra con accelerazione data da $a = F/m = F/(m_1 + m_2)$. A questo punto, concentriamo la nostra attenzione sul solo corpo di massa m_1. Esso si muove verso destra con la stessa accelerazione a, tirato dalla forza $\mathbf{T}$, esercitata dal filo si di esso. Ancora dal secondo principio della dinamica, se ne deduce che il modulo di $\mathbf{T}$ vale $T = m_1 a = Fm_1/(m_1 + m_2)$. Nel caso in questione si ha $m_2 = 2m_1$, per cui $T = Fm_1/(m_1 + 2m_1) = F/3$. [a]

23. La corda e la carrucola sono considerati privi di massa e ogni forma di attrito è ritenuta trascurabile. Con queste premesse, la forza F esercitata ad un capo della corda si trasmette inalterata all'altro capo della corda. Pertanto, il corpo di massa m è soggetto all'azione di una forza netta pari esattamente a $F_{\text{tot}} = F - mg$ (avendo orientato verso l'alto l'asse verticale). Poiché il corpo si muove con velocità *costante* (non importa se verso l'alto o verso il basso), dal secondo principio della dinamica si deduce che la forza netta agente su di esso deve essere nulla, per cui $F = mg$. Quindi $m = F/g$ e, con i dati forniti dal problema, $m = 10$ kg. [a]

24. Il corpo non si muove a causa della forza di attrito che il piano, scabro, esercita su di esso. Il corpo si trova quindi in equilibrio e ciò implica, necessariamente, che la risultante delle forze ad esso applicate è identicamente nulla. Poiché il piano su cui il corpo è poggiato è orizzontale, la forza peso è esattamente bilanciata dalla reazione normale del piano, mentre la forza orizzontale deve essere bilanciata dalla forza di attrito, che agisce nella direzone opposta. Pertanto, il valore di quest'ultima deve essere esattamente 1 N. Il valore che si ottiene moltiplicando il coefficiente di attrito statico per il modulo della reazione vincolare (in questo caso $\mu_s N = \mu_s mg \simeq 5$ N), invece, non è altro che il valore *massimo* che la forza di attrito può assumere e non coincide, in generale, con quello della forza di attrito stessa. [c]

25. Se fosse presente una sola delle tre masse mostrate in figura, la pulsazione delle oscillazioni della massa sarebbe $\omega = \sqrt{k/m}$. Nel caso in questione, ci si può convincere facilmente che l'azione delle tre molle è equivalente a quella di un'unica molla avente costante elastica pari a $3k$. Infatti, consideriamo di spostare la massa dalla posizione di equilibrio, per esempio, della quantità x verso destra. In questa situazione entrambe le molle di sinistra sono in estensione e quindi esercitano una forza di richiamo verso la loro posizione di equilibrio, cioè verso sinistra. Dal canto suo, la molla di destra risulta compressa ed esercita, anch'essa, una forza di richiamo verso sinistra. In conclusione, ciascuna delle tre molle esercita sulla massa una forza di richiamo, diretta verso sinistra e di modulo pari a kx. La risultante di queste tre forze è quindi una forza di modulo $3kx$ diretta verso la posizione di equilibrio: la stessa che eserciterebbe un'unica molla avente costante elastica $3k$. Tutto ciò premesso, è chiaro che il sistema oscillerà con una pulsazione pari a $\omega = \sqrt{3k/m}$. [a]