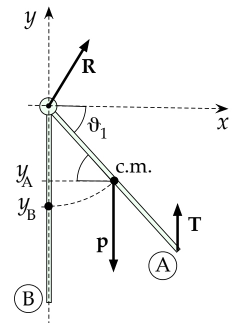
Fisica I per Ingegneria

A.A. 2016/2017 - Prova di accertamento intermedia del 26 aprile 2017

Soluzione del problema

La sbarretta è soggetta all'azione delle tre forze mostrate in figura: la tensione del filo ($\mathbf{T}$, di modulo incognito), la reazione vincolare del perno ($\mathbf{R}$, per ora incognita sia come modulo che come direzione e verso), e la forza peso ($\mathbf{p}$, di modulo pari a Mg). Quest'ultima è pensata applicata al centro di massa della sbarra perché è in quella posizione che bisogna applicarla per calcolarne il momento rispetto al perno. Poiché la sbarra è omogenea, il suo centro di massa coincide con il suo centro geometrico.



(a) La condizione di equilibrio rotazionale impone che la somma dei momenti delle tre forze sia uguale a zero. Tenendo conto della definizione di momento di una forza (e di quanto detto sopra), i momenti assiali delle tre forze in gioco risultano: $M_T = TL\cos\vartheta_1$, $M_R = 0$, e $M_p = -Mg(L/2)\cos\vartheta_1$. Pertanto

$$TL\cos\vartheta_1 - Mg(L/2)\cos\vartheta_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = Mg/2 \simeq 4.9 \text{ N} .$$

(b) La condizione di equilibrio traslazionale impone che la risultante delle tre forze, $\mathbf{F}^{(\text{tot})}$, sia uguale a zero. Proiettando le tre forze lungo gli assi x e y (orizzontale e verticale, rispettivamente) mostrati in figura otteniamo

$$\begin{cases} F_x^{(\text{tot})} = R_x = 0 \\ F_y^{(\text{tot})} = R_y - Mg + T = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = Mg - T = Mg/2 \simeq 4.9 \text{ N} . \end{cases}$$

(c) Poiché l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa, l'energia meccanica del sistema si conserva durante il moto. L'energia potenziale della forza peso per un corpo esteso si calcola considerando tutta la massa del corpo concentrata nel suo centro di massa. Nella posizione iniziale (A) l'energia del sistema è puramente potenziale e pertanto vale $E(A) = Mgy_A$. Nella posizione B la sbarra perde energia potenziale e acquista energia cinetica (E_c), risultando $E(B) = Mgy_B + E_c$. Uguagliando le due energie si ottiene

$$Mgy_A = Mgy_B + E_c \qquad \Rightarrow \qquad E_c = Mg(y_A - y_B) = Mg(L/2)(1 - \sin\vartheta_1) \simeq 1.22 \text{ J} .$$

(d) L'energia cinetica calcolata nel punto (c) si esprime attraverso il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'asse di rotazione, che vale $I = (1/3)ML^2$, e la velocità angolare della sbarretta (ω): $E_c = (1/2)I\omega^2$. Il centro di massa della sbarretta ruota su una circonferenza di raggio $L/2$ per cui la sua velocità nella posizione B risulta

$$v = \omega\,\frac{L}{2} = \sqrt{\frac{2E_c}{I}}\,\frac{L}{2} = ... = \sqrt{\frac{3}{4}\,gL(1 - \sin\vartheta_1)} \simeq 1.36 \text{ m/s} .$$

(Esempio di) risposta alla domanda

Data la legge oraria di un punto che si muove su un piano (o nello spazio), $\mathbf{r}(t)$, la sua velocità è definita come il vettore

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Tale vettore è parallelo, in ogni punto, alla tangente alla traiettoria in quel punto. Derivando la velocità si ottiene il vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

che invece può formare, in generale, un angolo qualsiasi con la tangente alla traiettoria, e quindi con il vettore velocità.

Per rispondere alla domanda conviene introdurre il *sistema di riferimento intrinseco* del punto materiale, che è un sistema di riferimento cartesiano avente, in ogni punto, un asse parallelo e un asse perpendicolare alla tangente alla traiettoria. Introducendo, nell'ordine, i versori $\hat{\tau}_t$ e $\hat{\tau}_n$ per individuare i suddetti assi, si può dimostrare che l'accelerazione, in generale, può scriversi come

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\tau}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{\tau}_n\,.$$

In questa equazione, v indica il modulo della velocità e R il raggio di curvatura della traiettoria nel punto considerato. Da essa si deduce che la quantità $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ rappresenta la componente di $\mathbf{a}$ sull'asse tangente alla traiettoria (a_t), mentre v^2/R rappresenta la componente di $\mathbf{a}$ sull'asse ortogonale (cioè normale) alla traiettoria (a_n). Viceversa, la velocità ha sempre solo una componente: quella lungo l'asse tangente.

I vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ risulteranno tra loro perpendicolari nei punti in cui $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$. Questo, per esempio, si verifica sempre se il moto è *uniforme*, cioè quando v rimane costante nel tempo (come nel caso del moto circolare uniforme), ma anche quando v presenta un massimo o un minimo (come nel caso di un grave che si trovi sul vertice della sua traiettoria parabolica).

Al contrario, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ risulteranno paralleli ogni qual volta risulti nulla la quantità v^2/R. Questo si verifica quando $v = 0$ o quando R è infinito (e quindi, in particolare, sempre quando il moto è rettilineo, qualsiasi sia la legge oraria sull'asse del moto).