Fisica I per Ingegneria

A.A. 2014/2015 - Prima prova di accertamento - 21 aprile 2015

Soluzione del problema

Nel tratto AB, il corpo è soggetto all'azione della forza peso $\mathbf{p}$ (di modulo pari a mg), della reazione vincolare $\mathbf{N}$ e della forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Poiché il corpo non presenta accelerazione nella direzione ortogonale al piano, lungo tale direzione la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Pertanto, $N = mg\cos\vartheta$, da cui $F_A = \mu_d N = \mu_d mg\cos\vartheta$.

1. La velocità in B (v_B) può essere calcolata a partire dalla variazione di energia cinetica tra A e B (ΔE_c^{AB}). Questa corrisponde (dal teorema delle forze vive) al lavoro totale compiuto sul punto tra A e B. In questo caso, le uniche forze che compiono lavoro sono la forza peso e la forza di attrito. La prima (conservativa) compie un lavoro pari a mgh; la seconda (non conservativa) compie un lavoro pari a $-F_A\ell$, dove $\ell = h/\sin\vartheta$ è la lunghezza del tratto AB. Pertanto

   $$\Delta E_c^{\mathrm{AB}} = mgh - F_A h/\sin\vartheta = mgh\,(1-\mu_d/\tan\vartheta)\ .$$

   Poiché il punto parte da A con velocità nulla, allora $\Delta E_c^{\mathrm{AB}} = (1/2)mv_B^2$, da cui

   $$v_B = \sqrt{\frac{2\,\Delta E_c^{\mathrm{AB}}}{m}} = \sqrt{2gh\left(1-\frac{\mu_d}{\tan\vartheta}\right)} \simeq 2.45\ \mathrm{m/s}\ .$$

2. Nel tratto AB, la componente diretta parallelamente al piano inclinato della risultante delle forze applicate al punto vale $F_\parallel = mg\sin\vartheta - F_A = mg\sin\vartheta - \mu_d mg\cos\vartheta$, per cui la corrispondente accelerazione è

   $$a_{\mathrm{AB}} = \frac{F_\parallel}{m} = g(\sin\vartheta - \mu_d\cos\vartheta) \simeq 1.51\ \mathrm{m/s^2}\ .$$

   Si sarebbe potuto ottenere il risultato di cui al punto (1) anche partendo da questa espressione dell'accelerazione e considerando che, essendo il moto uniformemente accelerato, $v_B^2 = 2a_{\mathrm{AB}}\ell$.

3. Valgono le stesse considerazioni fatte per il punto (1), con l'unica differenza che ora il piano è orizzontale. L'unica forza che ha una componente lungo la direzione del moto è la forza di attrito che, poiché qui la reazione normale è pari a $N = mg$, vale $F_A = \mu_d mg$. La variazione di energia cinetica risulta quindi

   $$\Delta E_c^{\mathrm{BC}} = -F_A\,d = -\mu_d\,m\,g\,d \simeq -9.8\ \mathrm{J}\ .$$

4. Il punto materiale arriva in C con energia cinetica data da

   $$E_c^{\mathrm{C}} = \Delta E_c^{\mathrm{AB}} + \Delta E_c^{\mathrm{BC}} = m\,g\,h\left[1-\mu_d\left(\frac{1}{\tan\vartheta}+\frac{d}{h}\right)\right]\ .$$

   Nel tratto CD, trascurando la forza di attrito radente dinamico col piano orizzontale, l'unica forza che compie lavoro à la forza elastica esercitata dalla molla. Essendo questa una forza conservativa, l'energia meccanica del sistema si deve conservare. Quindi, indicando con δ il massimo valore della compressione della molla, si ha

   $$E_c^{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \sqrt{\frac{2\,E_c^{\mathrm{C}}}{k}} = \sqrt{\frac{2mgh}{k}\left[1-\mu_d\left(\frac{1}{\tan\vartheta}+\frac{d}{h}\right)\right]} \simeq 8.4\ \mathrm{cm}\ .$$

(Esempio di) risposta alla domanda

Il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ in un percorso ℓ che unisce il punto A al punto B si scrive, nel caso più generale,

$$W^{(F)}_{\mathrm{AB},\ell} = \int_{A\ (\ell)}^{B} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \ .$$

L'integrale che compare qui è un integrale di linea, che si riduce ad un integrale semplice quando si consideri un percorso rettilineo. In questo caso, indicando come asse x la retta lungo la quale si svolge il moto, l'integrale infatti diventa

$$W^{(F)}_{\mathrm{AB}} = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\ \mathrm{d}x \ ,$$

dove F_x è la componente di $\mathbf{F}$ lungo l'asse x (che è, in generale, una funzione di x) mentre x_A e x_B sono, rispettivamente, le coordinate di A e di B.

Una forza si dice *conservativa* quando il lavoro da essa compiuto non dipende dal particolare percorso che porta da A a B, ma solo dalle coordinate dei punti iniziale e finale. In formule:

$$W^{(F)}_{\mathrm{AB},\ell} = W^{(F)}_{\mathrm{AB},\ell'} \ ,$$

per qualsiasi scelta dei percorsi ℓ e ℓ'. Quando questo accade, è possibile definire la funzione *energia potenziale* (U), dipendente solo dalla posizione, tale che il lavoro $W^{(F)}_{\mathrm{AB}}$ possa essere calcolato come

$$W^{(F)}_{\mathrm{AB}} = U(A) - U(B) \ .$$

La funzione $U(A)$ corrisponde al lavoro compiuto dalla forza nello spostamento dal punto A ad un altro punto, scelto a piacere come riferimento.

Nel caso della forza peso esercitata su un punto materiale di massa m, utilizzando un sistema di riferimento cartesiano con l'asse y verticale orientato verso l'alto e prendendo come quota di riferimento il piano $y = 0$, se il punto si trova alla quota y_A, la sua energia potenziale è

$$U(y_A) = \int_{y_A}^{0} (-mg)\ \mathrm{d}y = m\,g\,y_A \ .$$

Per il calcolo dell'energia potenziale di un sistema di N punti materiali, aventi masse m_i (con $i = 1, ..., N$) e soggetti alla forza peso, si dovranno sommare le energie potenziali pertinenti a ciascuno dei punti. Indicando con y_i la coordinata y del punto $i-$esimo, si ha

$$U_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, g\, y_i \ .$$

Ricordando l'espressione della coordinata y del centro di massa del sistema, cioè

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \ ,$$

l'energia potenziale risulta pari a

$$U_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, g\, y_{\mathrm{cm}} = M\, g\, y_{\mathrm{cm}} \ ,$$

avendo introdotto la massa totale del sistema $M = \sum_i m_i$. L'energia potenziale coincide dunque con quella che avrebbe un unico punto materiale, di massa M, posizionato alla quota del centro di massa del sistema.