Fisica I per Ingegneria

A.A. 2014/2015 - Appello del 9 luglio 2015

Soluzione del problema

- Poiché agiscono solo forze conservative, la massima compressione della molla può essere ricavata dalla conservazione dell'energia, tra la posizione in cui la massa viene lasciata cadere e il punto in cui si ferma. Indicando con $h = L(1 - \cos\vartheta_0)$ la differenza di quota tra queste due posizioni si ha

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2mgh}{d^2} = \frac{2mgL(1-\cos\vartheta_0)}{d^2} \simeq 2.9 \times 10^3 \text{ N/m}$$

- Quando la massa viene lasciata cadere, essa percorre una traiettoria circolare di raggio L. Però immediatamente dopo il lancio la sua velocità è nulla, per cui la componente normale della risultante delle forze agenti su di essa ($F_n^{(\mathrm{tot})}$) deve essere anch'essa nulla (perché, in generale, $F_n^{(\mathrm{tot})} = mv^2/L$). Indicando con T la tensione del filo e proiettando la forza peso nella direzione centripeta si ha

$$F_n^{(\mathrm{tot})} = T - mg\cos\vartheta_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = mg\cos\vartheta_0 \simeq 0.69 \text{ N}$$

- La velocità richiesta (v_1) può essere calcolata ancora con la conservazione dell'energia. Indicando con $h' = L(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$ la differenza di quota tra le posizioni corrispondenti agli angoli ϑ_0 e ϑ_1 si ha

$$mgh' = \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2gL(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)} \simeq 1.25 \text{ m/s}$$

- La componente normale dell'accelerazione (a_n) nella posizione individuata dall'angolo ϑ_1 può essere calcolata direttamente conoscendo il valore della velocità in quel punto. Infatti

$$a_n = \frac{v_1^2}{L} = 2g(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) \simeq 3.1 \text{ m/s}^2$$

  La componente tangenziale (a_n) la si ricava dalla seconda legge di Newton ($F_t^{(\mathrm{tot})} = ma_t$). Nel nostro caso,

$$F_t^{(\mathrm{tot})} = mg\sin\vartheta_1 \qquad \Rightarrow \qquad a_t = g\sin\vartheta_1 \simeq 4.9 \text{ m/s}^2$$

(Esempio di) risposta alla domanda

Indicando con m la massa di un punto materiale, con $\mathbf{a}$ la sua accelerazione, e con $\mathbf{F}_{\rm tot}$ la risultante delle forze che agiscono su di esso, il secondo principio della dinamica afferma che $\mathbf{F}_{\rm tot} = m\,\mathbf{a}$. Rappresentando i suddetti vettori attraverso le loro componenti in sistema cartesiano avente un asse tangente e l'altro ortogonale alla traiettoria, individuate rispettivamente dai pedici t e n, si ha

$$F_t^{(\rm tot)} = ma_t = m\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} \; ; \qquad F_n^{(\rm tot)} = ma_n = m\frac{v^2}{R} \; ,$$

dove v indica la velocità scalare del punto lungo la traiettoria e R il raggio di curvatura della traiettoria. In generale, sia v che R dipendono dal tempo. In particolare, quindi, la componente tangenziale della risultante delle forze applicate al punto è responsabile della variazioni del modulo della velocità (essendo proporzionale alla derivata temporale di v), mentre la componente normale è responsabile delle variazioni di direzione (essendo inversamente proporzionale ad R).

Nel caso di moto circolare, il punto percorre una traiettoria di forma circolare e quindi il raggio di curvatura rimane costante nel tempo e uguale al raggio della traiettoria. Utilizzando la variabile polare ϑ per rappresentare la posizione del punto sulla circonferenza, si possono definire la *velocità angolare* e l'*accelerazione angolare* come

$$\omega = \frac{{\rm d}\vartheta}{{\rm d}t} \; , \qquad \alpha = \frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} \; ,$$

attraverso le quali è possibile esprimere la velocità e le componenti dell'accelerazione del punto:

$$v = \omega R \; , \qquad a_t = \frac{{\rm d}(\omega R)}{{\rm d}t} = \alpha R \; , \qquad a_n = \omega^2 R \; .$$

Risulta quindi che $F_t^{(\rm tot)} = m\alpha R$ e $F_n^{(\rm tot)} = m\omega^2 R$.

Nel caso di moto circolare uniforme ω è costante, per cui $\alpha = 0$ e quindi deve essere $F_t^{(\rm tot)} = 0$, mentre $F_n^{(\rm tot)}$ deve essere costante e diversa da zero (supponendo $\omega \neq 0$) . Essendo la traiettoria circolare, questo significa che la risultante delle forze applicate al punto ha modulo costante ($m\omega^2 R$) ed è diretta sempre verso il centro della circonferenza.

Nel caso di moto circolare uniformemente accelerato α è costante (e diversa da zero), per cui anche $F_t^{(\rm tot)}$ è costante e diversa da zero. Invece, ω varia linearmente nel tempo con legge lineare:

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t \; ,$$

per cui anche $F_n^{(\rm tot)}$ varia nel tempo. In questo caso, la risultante delle forze applicate al punto non ha modulo costante e non è diretta verso il centro della circonferenza.