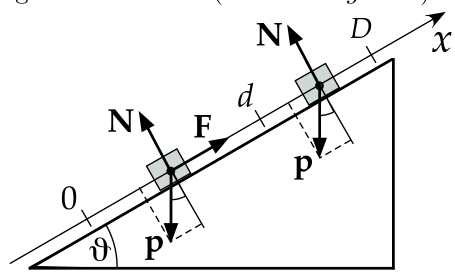
Fisica I per Ing. Elettronica, Ing. Informatica e Ing. Meccanica
A.A. 2013/2014 - Prima prova di accertamento - 24 aprile 2014

Soluzione del problema B

Nel primo tratto, il corpo è soggetto all'azione della forza peso $\mathbf{p}$ (di modulo pari a mg), della reazione vincolare $\mathbf{N}$, e della forza $\mathbf{F}$. Conviene fissare un sistema di riferimento con l'asse x diretto lungo il piano, come mostrato in figura, con l'origine coincidente con la posizione iniziale del corpo. Poiché il corpo non presenta accelerazione nella direzione ortogonale all'asse x, la reazione normale $\mathbf{N}$ deve bilanciare la componente della forza peso ortogonale all'asse x (che vale $mg\cos\vartheta$).



1. La componente x della risultante delle forze applicate al corpo vale $F_x^{(\mathrm{tot})} = F - mg\sin\vartheta$, per cui la sua accelerazione risulta
$$a_1 = \frac{F_x^{(\mathrm{tot})}}{m} = \frac{F}{m} - g\sin\vartheta \simeq 15 \text{ m/s}^2$$
2. Poiché a_1 è costante, il corpo segue un moto uniformemente accelerato. Indicando con t_1 l'istante in cui il corpo raggiunge la posizione d e considerando che esso parte all'istante $t = 0$ con velocità nulla, si ha
$$d = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2d}{F/m - g\sin\vartheta}} \simeq 0.51 \text{ s}$$

Il corpo arriva alla fine del primo tratto con velocità $v_1 = a_1 t_1$. Quando $\mathbf{F}$ smette di agire, il corpo rimane soggetto all'azione delle altre tre forze, che restano invariate. In particolare, la componente x della risultante delle forze ora vale $F_x^{(\mathrm{tot})} = -mg\sin\vartheta$, per cui l'accelerazione del corpo risulta costante e pari a $a_2 = -g\sin\vartheta$.

1. Essendo il moto uniformemente accelerato anche in questa fase, la velocità segue la legge oraria $v(t) = v_1 + a_2(t - t_1)$. Per calcolare l'istante in cui il corpo si ferma (t_2) è sufficiente imporre che risulti $v(t_2) = 0$. Pertanto
$$v(t_2) = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = t_1 - \frac{v_1}{a_2} = \frac{F\,t_1}{mg\sin\vartheta} \simeq 2.1 \text{ s}$$
2. Il lavoro totale compiuto sul corpo potrebbe essere calcolato sommando i lavori compiuti dalla forza $\mathbf{F}$ e dalla forza peso (la reazione normale non compie lavoro). In particolare, il lavoro della forza peso potrebbe essere calcolato come $-mgh$, dove h indica il dislivello tra la posizione finale e quella finale. Tuttavia, la strada più semplice consiste nel prendere in considerazione il teorema delle forze vive, tra la posizione iniziale e quella finale: il corpo parte da fermo e arriva fermo, per cui il lavoro totale compiuto su di esso è sicuramente nullo.

Risposta alla domanda B

Il *teorema delle forze vive* afferma che il lavoro totale compiuto su un punto materiale, calcolato dalla posizione A alla posizione B lungo una traiettoria, coincide con la variazione dell'energia cinetica del punto da A a B. Per lavoro totale si intende la somma dei lavori compiuti da tutte le forze che agiscono sul punto o, analogamente, il lavoro compiuto sul punto dalla risultante di tutte le forze applicate. In formule:

$$W_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{tot})} = E_c(B) - E_c(A) \; .$$

Esso si applica qualsiasi siano le forze applicate al corpo, indipendentemente dalla loro natura.

La forza $\mathbf{F}$ si dice *conservativa* quando il lavoro ($W_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{F})}$) che essa compie nello spostamento dalla posizione A alla posizione B non dipende dal percorso seguito, ma solo dalle coordinate di A e di B. Per ogni forze conservativa è possibile definire una *energia potenziale* ($U^{(\mathrm{F})}$), funzione di punto, tale che si abbia sempre

$$W_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{F})} = U^{(\mathrm{F})}(A) - U^{(\mathrm{F})}(B) \; .$$

Se tutte le forze che compiono lavoro su un punto materiale che si sposta dalla posizione A alla posizione B sono conservative, il lavoro totale compiuto sul punto da A a B può essere calcolato come differenza dell'energia potenziale totale (U), tra il punto A e il punto B, cioè

$$W_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{tot})} = U(A) - U(B) \; .$$

Dal teorema delle forze vive risulta pertanto che

$$E_c(B) - E_c(A) = U(A) - U(B) \qquad \Rightarrow \qquad E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A) \; .$$

Definendo l'*energia meccanica* (E) come la somma dell'energia cinetica e l'energia potenziale ($E = E_c + U$), risulta quindi che, se tutte le forze che compiono lavoro su un punto materiale sono conservative, il valore di E non varia nello spostamento da A a B, e quindi l'energia meccanica *si conserva.*