Fisica I per Ing. Elettronica ☐ e *Fisica* per Ing. Informatica ☐

A.A. 2009/2010 - Appello del 15 giugno 2010

Soluzione del problema n. 1a

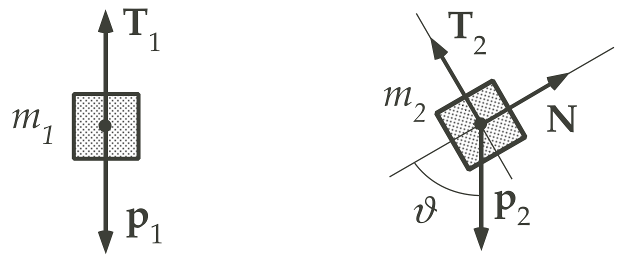
1. All'uscita della guida, nel punto D, il corpo compie un moto parabolico con velocità iniziale orizzontale v_D e quota iniziale pari a d. La condizione da imporre è il corpo raggiunga il suolo dopo aver percorso un tratto orizzontale di lunghezza pari a L. Utilizzando l'espressione della traiettoria del grave (con i valori di posizione e velocità iniziali del caso) si ha
$$y(L) = d - \frac{g}{2v_D^2}\,x^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_D = L\,\sqrt{\frac{g}{2d}} \simeq 3.2 \text{ m/s}$$

2. Nel tratto CD, l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa, per cui dalla conservazione dell'energia meccanica si ha
$$\frac{1}{2}\,mv_C^2 = \frac{1}{2}\,mv_D^2 + mgd \qquad \Rightarrow \qquad v_C = \sqrt{2gd\left(1 + \frac{L^2}{4d^2}\right)} \simeq 4.5 \text{ m/s}$$

3. In questo caso l'energia meccanica non si conserva, ma la differenza di energia tra posizione A e posizione C corrisponde al lavoro compiuto dalla forza di attrito (non conservativa) nel tratto BC. Quindi si ha
$$mgh = \frac{1}{2}\,mv_C^2 + \mu mgL \qquad \Rightarrow \qquad h = d\left(1 + \frac{L^2}{4d^2}\right) + \mu L \simeq 1.5 \text{ m}$$

Soluzione del problema n. 2a

1. I diagrammi di corpo libero per i due corpi sono:



avendo indicato con $\mathbf{p}_i$, con $p_i = m_i g$ $(i = 1, 2)$ la forza peso agente su ciascun corpo, con $\mathbf{T}_i$ $(i = 1, 2)$ la forza esercitata dal filo sui due corpi, e con $\mathbf{N}$ la reazione normale del piano sul corpo 2. Poiché il filo è ideale, la forza che esso esercita sui due corpi è la stessa $(T_1 = T_2 = T)$. In condizioni di equilibrio, T deve uguagliare sia la forza p_1 che la componente di p_2 parallela al piano e pertanto

$$\begin{cases} T = p_1 = m_1 g \\ \\ T = p_2 \sin\vartheta = m_2 g \sin\vartheta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad r_0 = \frac{m_1}{m_2} = \sin\vartheta = 0.5$$

2. Nella situazione più generale, i due corpi si muovono di moto rettilineo e il loro moto è determinato dal secondo principio della dinamica. Poiché il filo è inestensibile, le loro accelerazioni coincidono. Considerando solo le componenti della forza totale e dell'accelerazione di ciascuno dei due corpi nella direzione del moto, con verso concorde al verso positivo dell'asse y assegnato, si ha (con $a_1 = a_2 = a$)

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ \\ m_2 g \sin\vartheta - T = m_2 a \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = g\,\frac{m_2 \sin\vartheta - m_1}{m_1 + m_2} = g\,\frac{\sin\vartheta - 1}{2} \simeq -2.5\ \mathrm{m/s^2}$$

per cui i due corpi si muovono di moto uniformemente decelerato. Poiché per il corpo 1 si assumono posizione e velocità iniziali nulle, si ha

$$y_1 = \frac{1}{2}\,a t_1^2 = \frac{\sin\vartheta - 1}{4}\,g t_1^2 \simeq -5\ \mathrm{m}$$

3. In ogni istante, il filo si muove con la stessa velocità (diciamo $v(t)$) delle due masse, che coincide con la velocità con cui si muove ciascun punto del bordo della carrucola. Pertanto, dette α e ω, rispettivamente, l'accelerazione angolare e la velocità angolare della carrucola, si ha

$$\begin{cases} \alpha(t) = -\dfrac{a}{R} \\ \\ \omega(t) = -\dfrac{v(t)}{R} = -\dfrac{at}{R} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha(t_1) = \dfrac{1 - \sin\vartheta}{2R}\,g \simeq 5\ \mathrm{rad/s^2} \\ \\ \omega(t_1) = \dfrac{1 - \sin\vartheta}{2R}\,g t_1 \simeq 10\ \mathrm{rad/s} \end{cases}$$

avendo scelto per la carrucola il verso di rotazione antiorario come positivo (opposto al verso indicato in figura per l'asse y).

Soluzione del problema n. 3a

1. Il campo prodotto da un filo rettilineo uniformemente carico con densità lineare di carica λ, a distanza r dal filo è

$$E_\lambda(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \ ,$$

diretto nella direzione radiale (intesa in simmetria cilindrica). Questa espressione può essere facilmente dedotta direttamente dal teorema di Gauss. I due fili quindi danno luogo a due contributi al campo elettrostatico nel centro del quadrato, entrambi di modulo

$$E_\lambda(d/\sqrt{2}) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0 d} \ ,$$

diretti lungo le diagonali del quadrato, nel verso uscente dal filo. Il campo totale dovuto ai due fili si ottiene quindi sommando vettorialmente i corrispondenti contributi; le componenti lungo l'asse y si elidono mentre quelle lungo l'asse x danno:

$$\mathbf{E}_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \ E_\lambda(d/\sqrt{2})\ \hat{x} \ = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{x}.$$

D'altro canto, il campo prodotto nel punto O dalla carica puntiforme negativa posta in M risulta, dalla legge di Coulomb,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 (d/2)^2}\ \hat{x} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{x},$$

e quindi è identico a quello prodotto dai due fili. Pertanto il campo elettrostatico totale nel punto O è

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{x} \simeq 5.93\ \hat{x}\ \mathrm{V/m}$$

2. Dalle considerazioni fatte nel punto precedente risulta che il campo nel centro del quadrato si annulla se si cambia il segno del campo $\mathbf{E}_2$. Ciò si ottiene ponendo la carica puntiforme nel punto sul quadrato diametralmente opposto a M, cioè nel punto di mezzo del lato compreso tra i due fili. In alternativa, si può cercare la richiesta posizione x_N della carica puntiforme imponendo che il campo nell'origine da essa determinato sia opposto a quello dei fili. Per poter soddisfare questa condizione, la particella deve essere collocata nel semiasse negativo delle x (per cui $x_N < 0$):

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_1 \Rightarrow \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 (x_N)^2}\ (-\hat{x}) = -\left[\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 d}\ \hat{x}\right] \Rightarrow x_N = -\frac{d}{2} = -2\ \mathrm{cm}.$$

3. Il lavoro compiuto dal campo generato dai due fili nello spostamento della carica q dal punto M al punto N è pari, per definizione di potenziale, a

$$W_{MN} = q[V(M) - V(N)] = 2q[V_\lambda(M) - V_\lambda(N)] \ ,$$

essendo $V(M) - V(N)$ la differenza di potenziale (ddp) totale dovuta ad entrambi i fili e $V_\lambda(M) - V_\lambda(N)$ la ddp dovuta ad uno solo dei fili. La seconda uguaglianza segue dal fatto che i punti M e N sono equidistanti dai due fili.

La ddp $V_\lambda(M) - V_\lambda(N)$ può essere calcolata integrando il campo di ciascun filo, $\mathbf{E}_\lambda(r)$, tra $r_M = \sqrt{d^2 + (d/2)^2} = d\sqrt{5}/2$ a $r_N = d/2$, cioè

$$V_\lambda(M) - V_\lambda(N) = \int_{r_M}^{r_N} \mathbf{E}_\lambda(r) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_M}^{r_N} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ \ln\sqrt{5}\ = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ \ln 5,$$

per cui

$$W_{MN} = \frac{\lambda^2 d}{2\pi\varepsilon_0}\ \ln 5 \simeq 1.26 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}\ .$$

Soluzione del problema n. 4a

1. La forza per unità di lunghezza f che si scambiano i due fili ha modulo

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_0^2}{r} = 9 \times 10^{-7}\ \mathrm{N/m}\ .$$

ed è repulsiva, stanti i versi discordi delle correnti.

2. Il campo $\mathbf{B}$ dovuto ai due fili nel punto P si ottiene, in base al principio di sovrapposizione, sommando vettorialmente i campi di induzione magnetica dovuti ai due fili considerati separatamente. Le componenti lungo l'asse x si elidono mentre quelle lungo y danno:

$$\mathbf{B} = 2\cos\alpha\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_0}{r}\hat{y},$$

$$B = 3 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}\ .$$

Il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato alla spira si ottiene calcolando:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\hat{n}S = B\cos\theta\pi a^2 = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta \simeq 2.67 \times 10^{-10}\ \mathrm{Tm}^2\ .$$

avendo sfruttato la condizione $a \ll r$ che consente di considerare il campo $\mathbf{B}$ uniforme su tutta la superficie della spira stessa.

3. In base alla legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta nella spira è data da:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0(i_0 + kt)a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta\right] = -\frac{\mu_0 k a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta \simeq 8.89 \times 10^{-10}\ \mathrm{V}\ .$$

La potenza dissipata per effetto Joule nella spira è:

$$P = \frac{|fem|^2}{R} \simeq 1.97 \times 10^{-13}\ \mathrm{W}\ .$$