Fisica I per Ingegneria Elettronica

A.A. 2008/2009 – appello dell'8 settembre 2009

Soluzione del problema n. 1

1. Dalle leggi orarie per le coordinate orizzontale e verticale (x e y , rispettivamente, con l'origine degli assi coincidente con la posizione del cannone), si ricava l'espressione della traiettoria: $y = x \tan \theta - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \theta)$. Tale traiettoria deve passare per il punto (L, h) , per cui

$$h = L \tan \theta - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{L}{\cos \theta} \sqrt{\frac{g}{2(L \tan \theta - h)}} \simeq 36 \text{ m/s}$$

2. La legge oraria per la coordinata y è quella di un punto che si muove con accelerazione costante $-g$ e velocità iniziale $v_{0y} = v_0 \sin \theta$. La quota massima raggiunta è pertanto

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \simeq 49 \text{ m}$$

3. Dalla conservazione dell'energia meccanica (con m la massa del proiettile):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \simeq 30 \text{ m/s}$$

4. Per calcolare φ si può partire dalle due componenti della velocità al momento dell'impatto sul bersaglio, che si possono calcolare partendo dalle leggi orarie. In alternativa, si può sfruttare il risultato del punto 3. Infatti, poiché la componente x della velocità si mantiene costante, vale $v_{1x} = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e quindi risulta

$$\cos \theta = \frac{v_{1x}}{v_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos \left(\frac{v_0 \cos \theta}{v_1} \right) \simeq 0.93 \text{ rad} \simeq 53^\circ$$

Soluzione del problema n. 2

1. Il valore minimo di v_A è quello per cui il corpo arriva in B con velocità finale nulla. In questo caso, tutta l'energia cinetica iniziale viene dissipata per attrito nel tratto di lunghezza d . Il bilancio energetico risulta pertanto

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \mu_d mgd \quad \Rightarrow \quad v_m = \sqrt{2\mu_d gd} \simeq 4.5 \text{ m/s}$$

2. Per le stesse considerazioni energetiche di cui al punto 1 si ha

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu_d mgd \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_d gd} \simeq 4.0 \text{ m/s}$$

Per quanto riguarda il tempo necessario per arrivare in B, notiamo che il moto del corpo è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $-\mu_d g$ (= forza di attrito diviso massa). Pertanto si ha

$$v_B = v_A - \mu_d g t_B \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{v_A - v_B}{\mu_d g} \simeq 0.4 \text{ s}$$

3. Quando il corpo si ferma, una parte dell'energia cinetica posseduta nel punto B è stata convertita in energia potenziale della molla, mentre la rimanente parte è stata dissipata per attrito nel tratto di lunghezza δ . Il bilancio energetico fornisce quindi

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 + \mu_d mg\delta \quad \Rightarrow \quad k\delta^2 + 2\mu_d mg\delta - mv_B^2 = 0,$$

la cui soluzione positiva è

$$\delta = \frac{1}{k} \left[-\mu_d mg + \sqrt{(\mu_d mg)^2 + kmv_B^2} \right] \simeq 0.86 \text{ m}$$

4. Quando il corpo è fermo nella posizione di massima compressione della molla, esso rimane in equilibrio se la forza esercitata dalla molla è minore della forza di attrito massima che il piano riesce ad esercitare, che vale $\mu_s mg$. La condizione di equilibrio statico richiede pertanto che sia

$$k\delta \leq \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{k\delta}{mg} \simeq 0.86$$

Soluzione del problema n. 3

1. A distanza r (con $r \geq R$) dal centro della sfera si ha $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$, per cui

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad V(R+l) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R+l}$$

Poiché deve essere $V(R) = 3V(R+l)$, si ha

$$\frac{V(R)}{V(R+l)} = \frac{R+l}{R} = 3 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{l}{2} = 3 \text{ cm}$$

2. Si ha $Q = (4/3)\pi R^3 \rho$, con ρ la densità di carica della sfera. Pertanto

$$V_0 = V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3\epsilon_0 V_0}{R^2} = \frac{12\epsilon_0 V_0}{l^2} \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ C/m}^3$$

3. Il modulo della forza che si esercita tra due cariche puntiformi, di carica q , poste alla mutua distanza d , vale $F = q^2/(4\pi\epsilon_0 d^2)$. La stessa forza si esercita tra due particelle cariche di dimensione finita, purché abbiano la carica distribuita con simmetria sferica, come per il caso in questione. Nella nuova situazione si ha $d = 3R$ e

$$q = \frac{Q}{2} = \frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 2\pi\epsilon_0 V_0 R \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\pi\epsilon_0 V_0^2}{9} \simeq 3 \times 10^{-6} \text{ N}$$

4. Tale energia ($\mathcal{E}$) coincide con la carica della particella ($9Q$) moltiplicata per il potenziale elettrostatico, riferito all'infinito, che compete al punto di mezzo tra le due sferette. Tale punto dista $3R/2$ dal centro di ciascuna sferetta, mentre il potenziale è dato dalla somma dei potenziali dovuti a ciascuna sferetta. Pertanto si ha

$$\mathcal{E} = 2(9Q) \frac{Q/2}{4\pi\epsilon_0(3R/2)} = \frac{3Q^2}{2\pi\epsilon_0 R} = 12\pi\epsilon_0 V_0^2 l \simeq 200 \text{ nJ}$$

Soluzione del problema n. 4

1. All'istante $t = 0^+$, il punto B si trova allo stesso potenziale del punto A (il condensatore è equipotenziale), per cui la corrente erogata dal generatore vale

$$I_{\text{gen}}|_{t=0^+} = \frac{f}{r} = 12 \text{ A}$$

2. Per quanto detto a proposito del punto 1, la d.d.p. ai capi del condensatore è nulla all'istante $t = 0^+$, cioè

$$(V_B - V_A)|_{t=0^+} = 0$$

Quando si è raggiunta la condizione di regime, nel ramo del condensatore non passa più corrente e la d.d.p. ai suoi capi è la stessa presente ai capi del parallelo di R_1 e R_2 (diciamo, $R_{\parallel}$). In questa situazione, tale d.d.p. vale (poiché $R_1 = R_2$)

$$(V_B - V_A)|_{\text{reg}} = \frac{R_{\parallel}}{r + R_{\parallel}} f = \frac{R_2/2}{r + R_2/2} f = \frac{R_2}{2r + R_2} f = 6 \text{ V}$$

3. All'istante $t = t_0^+$, la d.d.p. ai capi del condensatore (e quindi di R_1 ed R_2) è la stessa del punto precedente, ovvero

$$(V_B - V_A)|_{t=t_0^+} = \frac{R_2}{2r + R_2} f$$

Quindi, in questo istante la corrente che scorre in R_2 vale

$$I_2|_{t=t_0^+} = \frac{(V_B - V_A)|_{t=t_0^+}}{R_2} = \frac{f}{2r + R_2} = 3 \text{ A}$$

mentre, dopo un tempo sufficientemente lungo, essa deve andare a zero con andamento esponenziale decrescente e costante di tempo $R_2 C$.

4. Dopo la rottura del filo tutta l'energia immagazzinata nel condensatore ($\mathcal{E}$) si converte in calore sul solo resistore R_2 . Pertanto,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C (V_B - V_A)|_{t=t_0^+}^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{R_2}{2r + R_2} f \right)^2 = 72 \text{ nJ}$$