Fisica 1 per Ing. Elettronica □ e *Fisica* per Ing. Informatica □

[A.A. 2008/2009 - appello del 26 giugno 2009]

Soluzione del problema n. 1

1. Scomponendo le tre forze in gioco (tensione filo di sospensione del pendolo $\mathbf{T}_1$, tensione del filo orizzontale $\mathbf{T}_2$, e forza peso $-mg\hat{y}$) lungo gli assi orizzontale (x) e verticale (y) e uguagliando a zero le componenti, si ha

$$\begin{cases} T_1 \sin\theta_0 - T_2 = 0 \\ \\ T_1 \cos\theta_0 - mg = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} T_1 = \dfrac{mg}{\cos\theta_0} = 2.26 \text{ N} \\ \\ T_2 = mg \tan\theta_0 = 1.13 \text{ N} \end{cases}$$

2. Dopo il taglio del filo orizzontale, la massa comincia a muoversi verso la posizione di equilibrio lungo una traiettoria circolare, soggetta alla forza peso e alla tensione del filo di sospensione. In ogni istante, la componente normale della forza risultante è data da $F_n = T_1 - mg\cos\theta$, che deve uguagliare $ma_n = mv^2/r$. Poiché immediatamente dopo il taglio il pendolo ha velocità nulla, si ha

$$F_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = mg\cos\theta_0 = 1.70 \text{ N}$$

3. Dalla conservazione dell'energia meccanica (l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa), considerando la posizione iniziale e quella per cui il pendolo passa per quota minima, si ha

$$mgr(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_M^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_M = \sqrt{2gr(1-\cos\theta_0)} = 0.51 \text{ m/s}$$

4. Per un generico θ, la tensione del filo vale (vedi punto 1) $T_1 = mg\cos\theta + mv^2/r$, per cui essa è massima quando il pendolo passa per la posizione di equilibrio. Quando $\theta = 0$ si ha

$$T_1^{(\mathrm{M})} = mg + mv_M^2/r = mg(3 - 2\cos\theta_0) = 2.49 \text{ N}$$

Soluzione del problema n. 2

1. Per qualsiasi spostamento (x) della massa dalla posizione di equilibrio, le forze delle molle sono parallele e concordi, per cui la forza totale risulta $F(x) = -(k_1 + k_2)x$. Il moto risulta pertanto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k_{eq}/m}$, dove $k_{eq} = k_1 + k_2$. Il corrispondente periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0.31 \text{ s}$$

2. Dalla conservazione dell'energia meccanica (le uniche forze che compiono lavoro sono le forze elastiche, conservative), considerando la posizione iniziale e quella per cui la massa passa per $x = 0$, si ha

$$\frac{1}{2}k_{eq}x_0^2 = \frac{1}{2}mv_M^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_M = x_0\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 4.0 \text{ m/s}$$

3. Il punto segue un moto armonico di pulsazione ω, con $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$. La legge oraria risulta pertanto

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

4. Il punto si muove con velocità $v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\omega x_0 \sin(\omega t)$, per cui la sua energia cinetica è

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k_{eq} x_0^2 \sin^2(\omega t)$$

Al tempo $t_1 = T/12$, si ha $\omega t_1 = (2\pi/T)(T/12) = \pi/6$, per cui

$$E_c(t_1) = \frac{1}{2} k_{eq} x_0^2 \sin^2(\pi/6) = 2 \text{ J}$$

L'energia potenziale è

$$U(t) = \frac{1}{2} k_{eq} x^2(t) = \frac{1}{2} k_{eq} x_0^2 \cos^2(\omega t)$$

e, al tempo $t_1 = T/12$, si ha

$$U(t_1) = \frac{1}{2} k_{eq} x_0^2 \cos^2(\pi/6) = 6 \text{ J}$$

Soluzione del problema n. 3

1. Per il teorema delle forze vive, la variazione di energia cinetica di un punto uguaglia il lavoro totale compiuto su di esso. In questo caso, dalla posizione iniziale (1) all'uscita dal condensatore (2), si ha (indicando con V la d.d.p. tra le armature del condensatore)

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = qV = \frac{qQ}{C} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2qQ}{mC}} = 1.0 \text{ m/s}$$

2. Dalla conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_A^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \sqrt{2gh + \frac{2qQ}{mC}} = 4.1 \text{ m/s}$$

3. Poiché all'uscita del condensatore la particella ha velocità orizzontale, il tempo che essa impiega per arrivare a quota nulla è $T = \sqrt{2h/g}$. In questo tempo, la particella percorre la distanza orizzontale

$$L = v_2 T = \sqrt{\frac{4hqQ}{mgC}} = 0.4 \text{ m}$$

4. Affiché la seconda particella (di carica q') arrivi nello stesso punto della prima, è sufficiente che la sua velocità di uscita dal condensatore sia la stessa dalla prima. Poiché la capacità del condensatore è cambiata per la presenza del gas ($C' = \kappa C$), deve valere

$$\sqrt{\frac{2qQ}{mC}} = \sqrt{\frac{2q'Q}{mC'}} \qquad \Rightarrow \qquad q' = \frac{C'}{C}\, q = \kappa\, q = 9 \ \mu\text{C}$$

Soluzione del problema n. 4

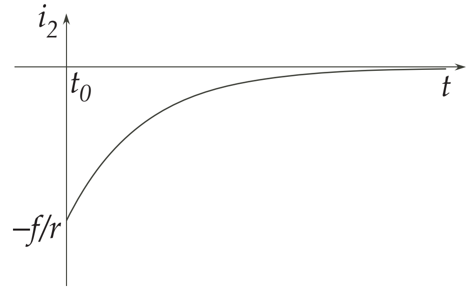
1. Immediatamente dopo la chiusura ($t = 0^+$) nell'induttore non scorre corrente, per cui il circuito si comporta come la serie delle resistenze r ed R_2. La corrente che vi scorre è quindi

$$i = \frac{f}{r + R_2} = 2 \text{ A}$$

2. Dal risultato del punto 1, la d.d.p. ai capi di R_2 è

$$V_A - V_D = \frac{R_2}{r + R_2}\, f = 6 \text{ V}$$

3. Nella situazione di regime (prima della commutazione dell'interruttore), l'induttore è equipotenziale e in esso scorre la corrente continua $i_0 = f/r$, da A a D. Dopo la commutazione, l'induttore si scarica sulla resistenza R_2, per cui la corrente i_2 che scorre su R_2 passa da f/r a zero con legge esponenziale e costante di tempo $\tau = L/R_2$. Notiamo che la corrente che scorre su R_2 ha verso opposto rispetto a quella di cui al punto 1 per cui, convenzionalmente, la consideriamo negativa.



4. L'energia dissipata su R_2 nel processo di scarica deve coincidere con l'energia immagazzinata nell'induttore prima della commutazione. Pertanto

$$U = \frac{1}{2}\, L\, i_0^2 = \frac{L\, f^2}{2\, r^2} = 3.24 \text{ mJ}$$

Allo stesso risultato si perviene integrando la potenza dissipata sulla resistenza da t_0 a infinito. L'espressione di tale potenza in funzione del tempo è $P(t) = R_2 i_0^2 \exp[-2(t-t_0)/\tau]$.

Soluzione del problema n. 5

1. Applicando la legge di Ampère ad una circonferenza di raggio r, coassiale al sistema, e sfruttando la simmetria si ottiene (per l'applicazione della legge di Ampère ad un problema di questo tipo si consulti il libro di testo a pag. 180)

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\, i_0\, r}{2\pi\, a_1^2} & (r < a_1) \\[2ex] \dfrac{\mu_0\, i_0}{2\pi\, r} & (a_1 < r < a_2) \\[2ex] 0 & (r > a_2) \end{cases}$$

essendo il campo diretto sempre nella direzione azimutale, con verso determinato dalla regola della vite.

2. Dai risultati del punto 1:

$$B(a_1/3) = \frac{\mu_0\, i_0}{6\pi\, a_1} = 80\ \mu\text{T}; \quad B(a_1) = \frac{\mu_0\, i_0}{2\pi\, a_1} = 240\ \mu\text{T}; \quad B(2a_2) = 0$$

3. Il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con la spira è

$$\Phi_B = h \int_{a_1}^{a_2} B(r)\, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 h\, i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

per cui la f.e.m. indotta sulla spira è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0\, h}{2\pi} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = -\frac{\mu_0 h\, i_0}{2\pi\tau} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = 79 \text{ nV}$$

4. La potenza dissipata sulla resistenza della spira è

$$P = \mathcal{E}_i^2/R = 3.1 \text{ pW},$$

costante nel tempo.