Fisica 1 per Ing. Elettronica □ e *Fisica* per Ing. Informatica □

[A.A. 2008/2009 - Seconda prova di esonero - 18 giugno 2009]

Soluzione del problema n. 1

1. Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio r, concentrica al sistema, e sfruttando la simmetria si ottiene (per l'applicazione della legge di Gauss ad un problema di questo tipo si consulti il libro di testo, a pag. 63)

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\,\varepsilon_0} & (r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \dfrac{\rho R_1^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2} & (r > R_2) \end{cases}$$

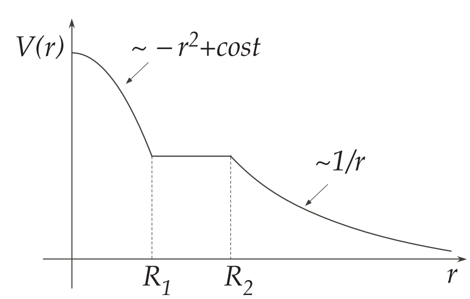
essendo il campo diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro del sistema (per $\rho > 0$). In particolare: $E(0) = 0$; $E(R_1/2) = \dfrac{\rho R_1}{6\varepsilon_0} = 20$ V/m; $E(3R_1/2) = 0$; $E(4R_1) = \dfrac{\rho R_1}{48\varepsilon_0} = 2.5$ V/m

2. Sulla superficie interna della buccia viene indotta una carica uguale e opposta alla carica totale (Q) della sfera interna (induzione completa). Sulla superficie esterna (S_2), essendo la buccia neutra, sarà presente la carica Q, distribuita uniformemente con densità

$$\sigma = \frac{Q}{S_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho}{4\pi R_2^2} = \frac{\rho R_1}{12} = 9 \times 10^{-11}\ \mathrm{C/m^2}$$

3. Integrando le espressioni del campo elettrico nelle varie regioni (e cambiando il segno) si ottiene:

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{6\,\varepsilon_0} r^2 + c_1 & (r < R_1) \\ c_2 & (R_1 < r < R_2) \\ \dfrac{\rho\, R_1^3}{3\,\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} + c_3 & (r > R_2) \end{cases}$$



dove i parametri c_1, c_2 e c_3, costanti, sono da determinarsi in base alla posizione scelta come riferimento e alla continuità del potenziale. Prendendo come riferimento il potenziale all'infinito si ha $c_3 = 0$.

4. L'energia potenziale della carica q_0 è data da $U(r) = q_0 V(r)$. Dalla conservazione dell'energia, con $E_c(r) =$ energia cinetica, si ha

$$U(\infty) + E_c(\infty) = 0 = U(0) + E_c(0) \qquad \Rightarrow \qquad q_0 = -\frac{mv^2}{2V(0)}$$

Per determinare $V(0)$ calcoliamo i valori delle costanti c_2 e c_3. Dalla continuità in $r = R_2$ si ha, per il potenziale della buccia,

$$c_2 = \frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0}$$

e, dalla continuità in $r = R_1$,

$$c_1 = \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\ .$$

Quest'ultimo valore coincide con $V(0)$, pertanto

$$q_0 = -\frac{3\varepsilon_0 m v^2}{2\rho R_1^2} = -12.5 \text{ nC}$$

Soluzione del problema n. 2

1. A regime, nel condensatore non scorre corrente, per cui il circuito si comporta come la serie di due resistenze, entrambe di valore R_1. La potenza erogata dal generatore è pertanto

$$P = \frac{f^2}{2R_1} = 24 \text{ W}$$

2. La tensione ai capi del condensatore è quella ai capi di una delle resistenze di un partitore di tensione con due resistenze uguali, cioè $V_C = f/2$, e quindi la carica sul condensatore è

$$Q = C\,\frac{f}{2} = 24 \times 10^{-6} \text{ C}$$

3. Dopo la commutazione, ancora in condizioni di regime, la tensione ai capi del condensatore è

$$V_C' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,f = \frac{f}{6}$$

La variazione di energia elettrostatica è quindi

$$\Delta U = \frac{1}{2}CV_C'^{\,2} - \frac{1}{2}CV_C^2 = -\frac{1}{9}Cf^2 = -64 \times 10^{-6} \text{ J}$$

4. Dopo l'inserzione del dielettrico, la capacità del condensatore diventa $C' = \kappa C$ e la carica su di esso $Q' = C'V_C' = \kappa CV_C'$. Tale carica deve uguagliare $Q = CV_C$, per cui

$$\kappa = \frac{f}{2}\,\frac{6}{f} = 3$$

Soluzione del problema n. 3

1. Il campo magnetico è presente solo all'interno del solenoide, in cui esso è uniforme e diretto come l'asse del solenoide. Il suo modulo vale

$$B(r) = \mu_0 n i_0 \;\; (r < b); \qquad B(r) = 0 \;\; (r > b)$$

2. Dalle precedenti relazioni si ricava:

$$B(0) = B(a/4) = 0.63 \text{ mT}; \qquad B(a) = 0$$

3. Il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con la spira è

$$\Phi_B = \mu_0\, n\, i(t)\, \pi b^2 = \mu_0\, n\, i_0\, \pi b^2 e^{-t/\tau}$$

per cui la f.e.m. indotta sulla spira è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 n \pi b^2 i_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

4. L'energia dissipata sulla resistenza della spira viene calcolata integrando la potenza $P(t) = \mathcal{E}_i^2/R$, cioè

$$U = \left(\frac{\mu_0 n \pi b^2 i_0}{\tau}\right)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{(\mu_0 n \pi b^2 i_0)^2}{2\tau R} = 3.04 \times 10^{-10} \text{ J}$$