

Applicazioni

Esempi

- nel testo di Barone et al.:
 - **Ricerca degli 0 di una funzione mediante il metodo di bisezione e mediante il metodo di Newton (4.3.2)**
 - Ricerca dei numeri primi (4.3.3)
 - Problemi di arrotondamento (4.5)
 - Riordinamento degli elementi di un vettore: Bubblesort (5.2.1)
 - Ricerca binaria (5.2.2)
 - Soluzione di sistemi di equazioni lineari (5.4, 7.3.2)
 - Generazione di numeri casuali (5.5) - Visto
 - Manipolazione di testi (5.6.3, 6.5.1)
 - Istogrammi (7.4.1) – Visto
 - Calcolo del χ^2 di una distribuzione (7.4.2)
 - Calcolo di una derivata (7.6)
 - **Interpolazione e integrazione numerica (cap. 8)**

soluzione di equazioni $f(x)=0$

- Uno dei problemi matematici di base è quello di trovare le soluzioni (o radici) di un'equazione $f(x)=0$, o che è lo stesso gli zeri della funzione $y = f(x)$;
- esistono per questo formule risolutive "esatte" e metodi iterativi "approssimati" o numerici.
- solo alcuni tipi molto particolari di equazioni ammettono formule risolutive (p.es. equazioni algebriche fino al quarto grado) e anche quando esistono queste formule sono spesso molto pesanti dal punto di vista computazionale.
- vediamo qui due metodi numerici: il metodo di bisezione e il metodo di Newton

metodo di bisezione

- e' un metodo iterativo ed e' il metodo piu' semplice
- ricerca del cambiamento di segno:
 - si calcola la funzione in un dato intervallo $[a, b]$ cominciando da a e con un passo h si percorre tutto l'intervallo calcolando per ogni x il corrispondente $y = f(x)$;
 - quando si verifica un cambiamento di segno della y , si può concludere che c'è almeno uno zero in $[x - h, x]$, a condizione che la funzione sia continua nell'intervallo
- iterazioni: da ripetere fin tanto che la lunghezza dell'intervallo $[a_1, b_1]$ e' inferiore a una precisione ϵ data
 - partendo dall'intervallo $[a_0, b_0]$ contenente uno zero
 - si determina $c_0 = (a_0 + b_0)/2$
 - si valuta il prodotto $p_0 = f(a_0) * f(c_0)$
 - se $p_0 < 0$ la soluzione e' compresa in $[a_0, c_0]$, si pone $a_1 = a_0$ $b_1 = c_0$
 - se $p_0 > 0$ la soluzione e' compresa in $[c_0, b_0]$, si pone $a_1 = c_0$ $b_1 = b_0$
 - si passa all'iterazione successiva partendo dall'intervallo $[a_1, b_1]$

metodo di Newton

- converge piu' velocemente del metodo di bisezione ma richiede una prima stima abbastanza buona della radice
- anche questo e' un metodo iterativo
 - data x_n stima ottenuta all'iterazione n
 - la stima successiva si costruisce ponendo uguale a zero $f(x_{n+1})$, ottenuta espandendo in serie la $f(x)$ intorno a x_n e fermandosi al primo ordine:
 - $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$
 - da cui $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
 - se la derivata f' non e' nota la si stima come $f'(x_n) = (f(x_n) - f(x_{n-1})) / (x_n - x_{n-1})$
 - ci si ferma quando la distanza tra due stime successive e' inferiore alla precisione ε prescelta

Interpolazione ed estrapolazione

- Il problema consiste nel calcolare il valore assunto da una funzione $f(\mathbf{x})$ in un punto \mathbf{x} arbitrario, noti i valori della funzione in un insieme finito di punti \mathbf{x}_i con $i=1,\dots,N$.
- Se \mathbf{x} è compresa tra due punti noti si parla di **interpolazione**, se è all'esterno dell'intervallo coperto dai punti noti si parla di **estrapolazione**.
- Illustriamo qui uno dei metodi più semplici.

Interpolazione mediante polinomi

Dato un qualsiasi insieme di N punti esiste un unico polinomio di ordine $N-1$ passante per questi punti. È definito dalla formula di Lagrange:

$$P_{N-1}(x) = \sum_i \left(\prod_j \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right) f(x_i)$$

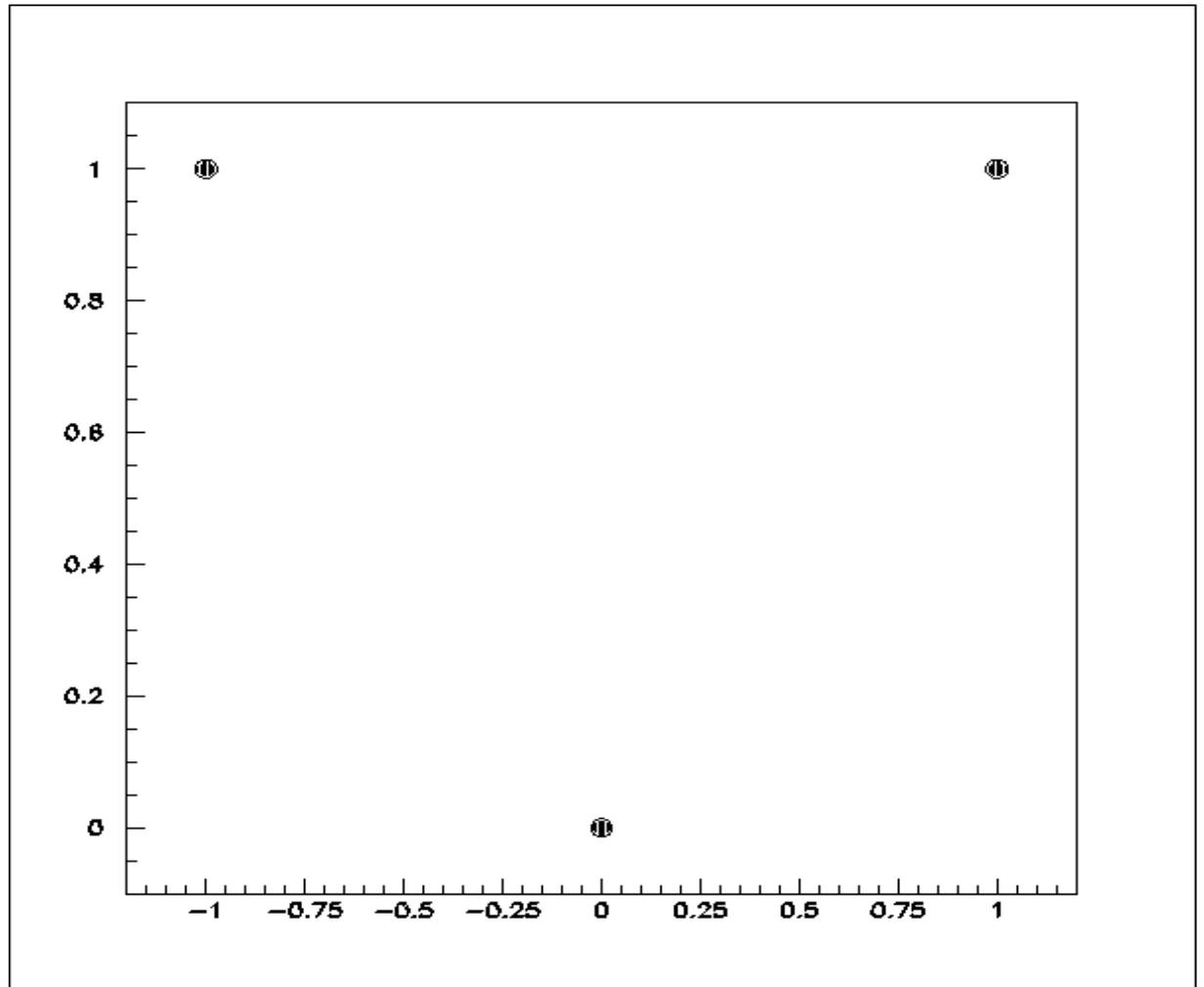
dove la sommatoria è sull'indice i e va da 1 a N , la produttoria è sull'indice j e va da 1 a N con j diverso da i

Errore

- L'errore commesso sull'interpolazione della funzione f nel punto x è
 $r(x) = f(x) - P_n(x)$ con n grado del polinomio interpolatore
- Se la funzione f è derivabile almeno n volte abbiamo un teorema che afferma che esiste almeno un punto ξ appartenente all'intervallo $x_1 \dots x_N$ nel quale
 $r(x) = g(\xi) \prod (x - x_i)$, dove la produttoria è su i compreso tra 1 e N , e g è la derivata n -ma ($n = N - 1$) della funzione f

Esempio

Supponiamo di cercare una funzione passante per i punti $(0,0)$, $(-1,1)$ e $(1,1)$.



Esempio

Il polinomio di Lagrange avrà grado 2 e sarà dato da

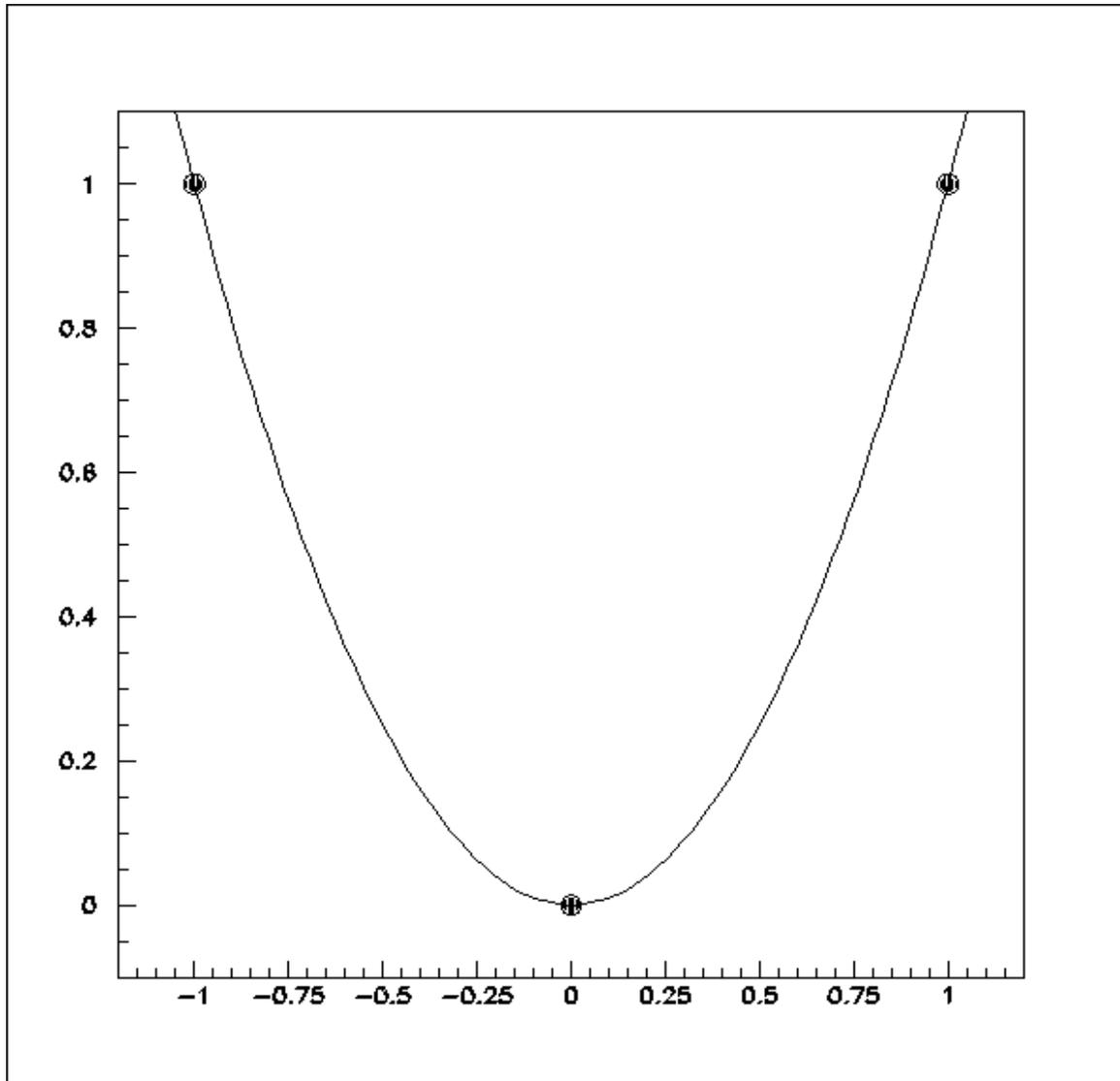
$$P_2(x) = (x+1)/(0+1)*(x-1)/(0-1)*0 \quad // \quad i=1$$

$$+(x-0)/(-1-0)*(x-1)/(-1-1)*1 \quad // \quad i=2$$

$$+(x-0)/(1-0)*(x+1)/(1+1)*1 \quad // \quad i=3$$

$$= x*(x-1)/2 + x*(x+1)/2 = x^2$$

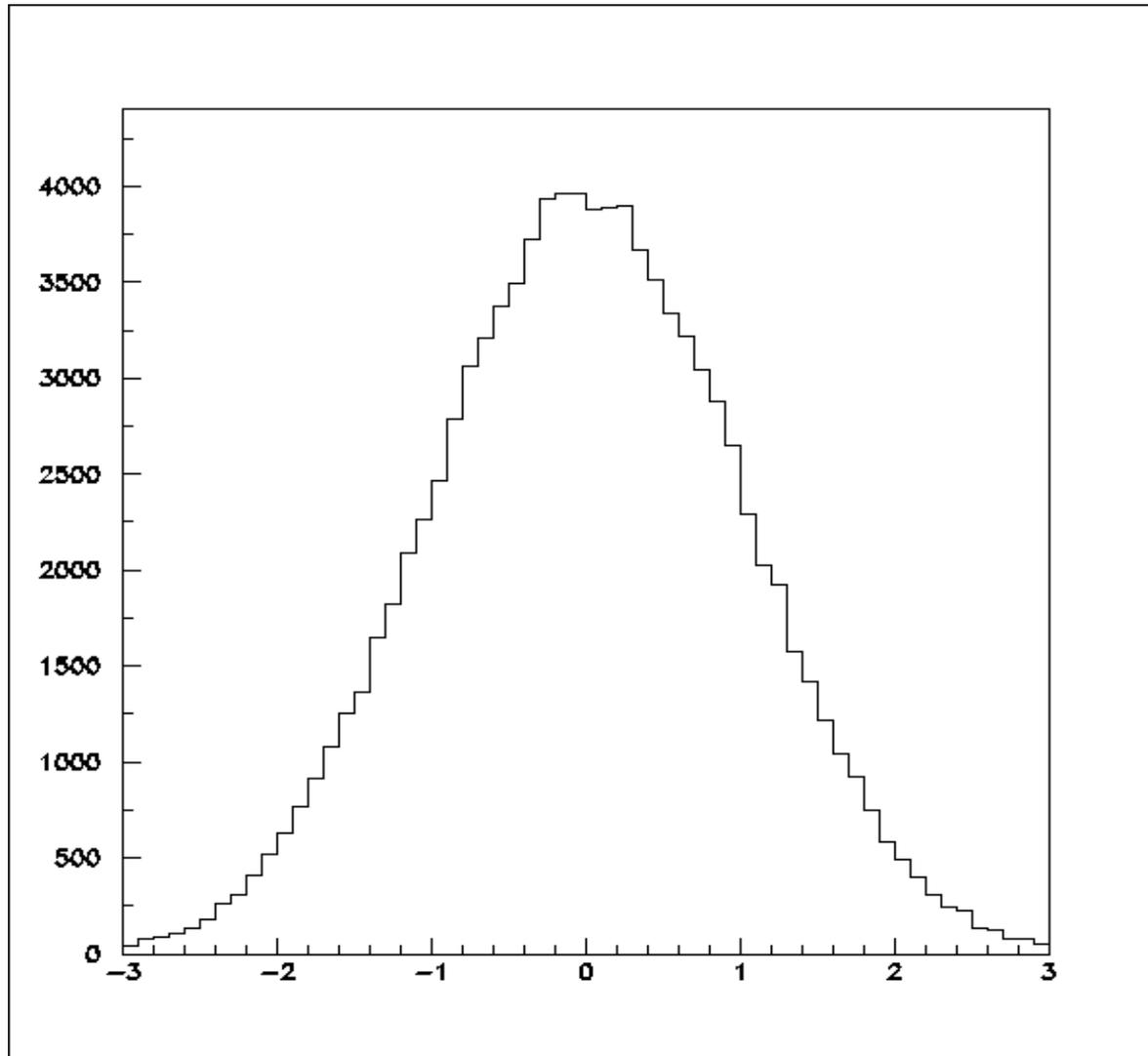
Esempio



Regressione (fit)

- se invece abbiamo un insieme di dati sperimentali che seguono un andamento funzionale previsto da un modello teorico dipendente da un insieme di parametri possiamo usarli per
 - estrarre i parametri del modello
 - stimare l'errore su di essi
 - valutare la bonta' della descrizione fornita dal modello

dati prodotti da `limitecentrale.c`
(100000 numeri)



Fit gaussiano

ipotesi: dati gaussiani

parametri: termine
costante, valor medio e
sigma

risultati:

media=0.0001

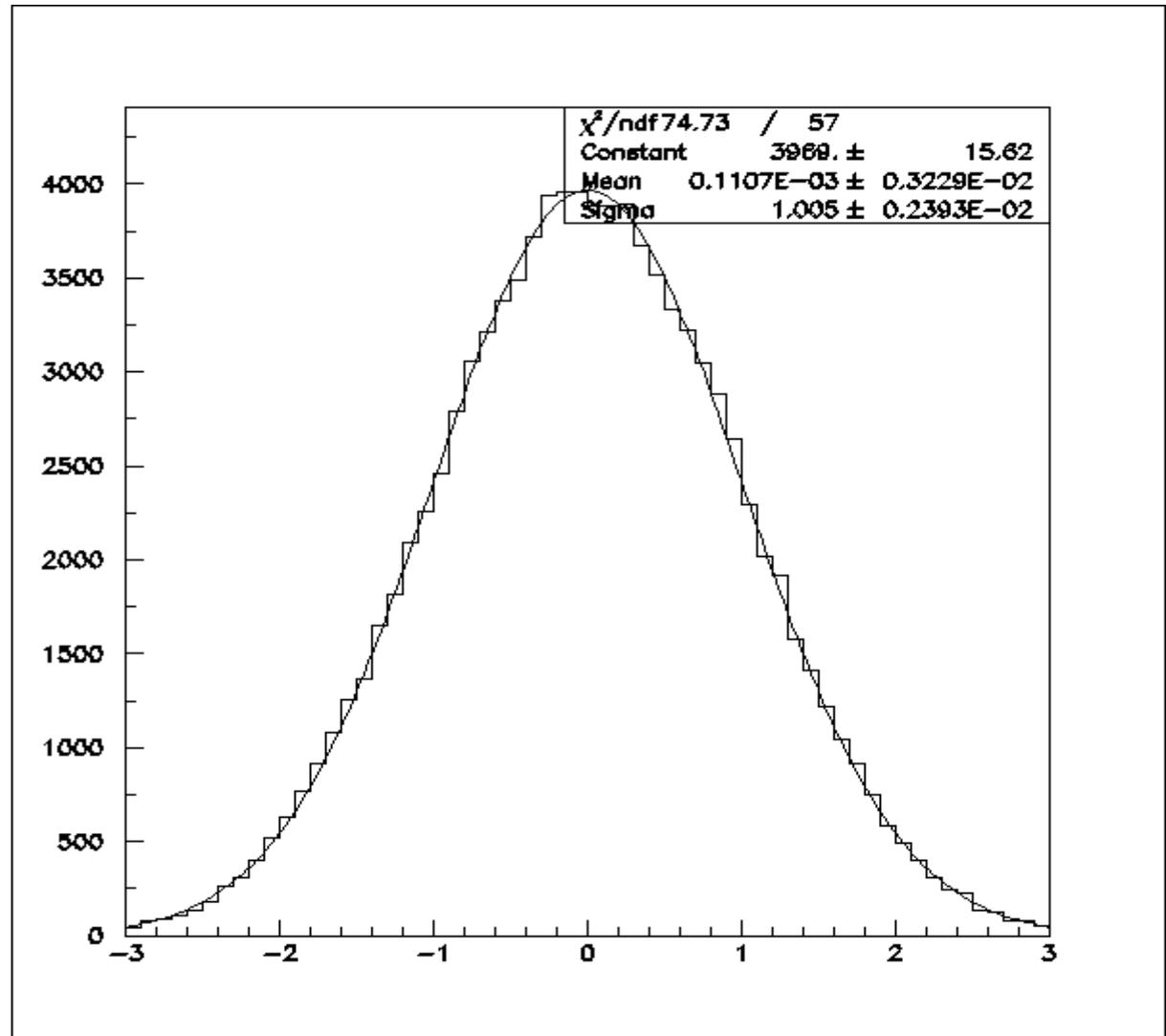
errore sulla media=0.003

sigma=1.005

errore su sigma=0.002

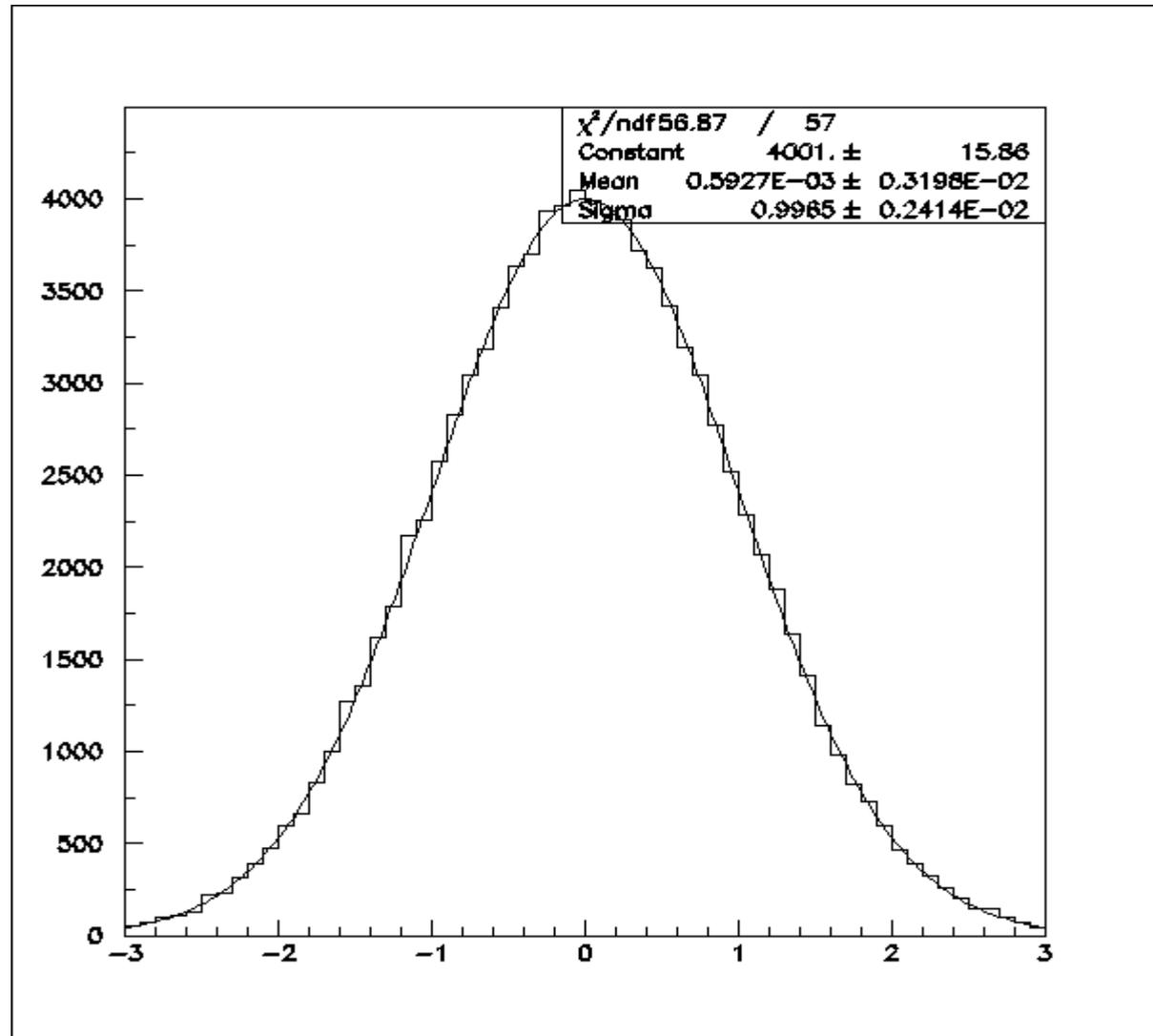
χ^2 per grado di liberta' =
74.7/57

misura la bonta' del fit



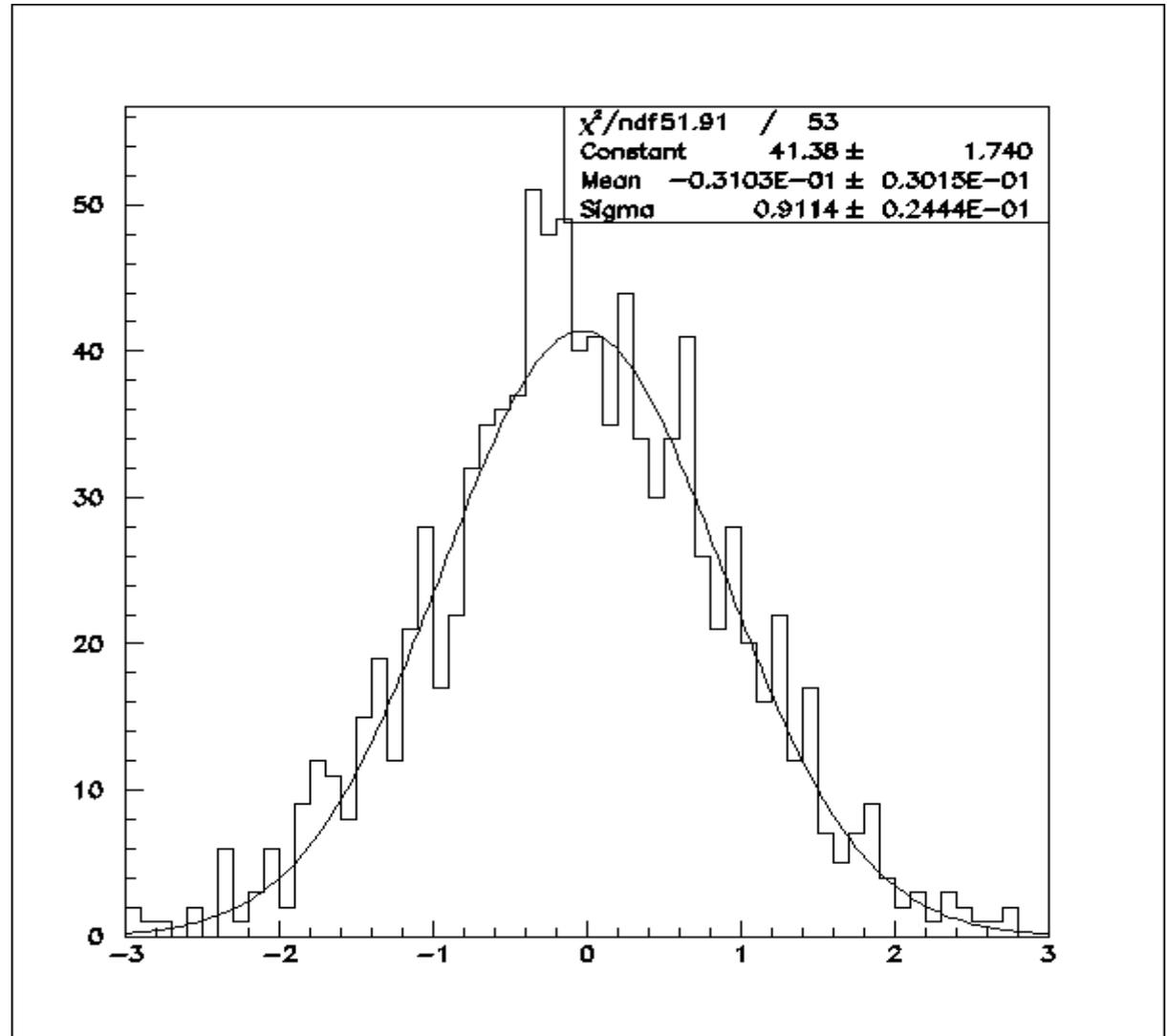
Fit gaussiano (2)

modificando
limitecentrale.c e
sommando
48 numeri invece di 12
(e dividendo per 2 il
risultato) si ottiene una
distribuzione gaussiana
migliore: χ^2 per grado
di liberta' = 56.7/57



Fit gaussiano (3)

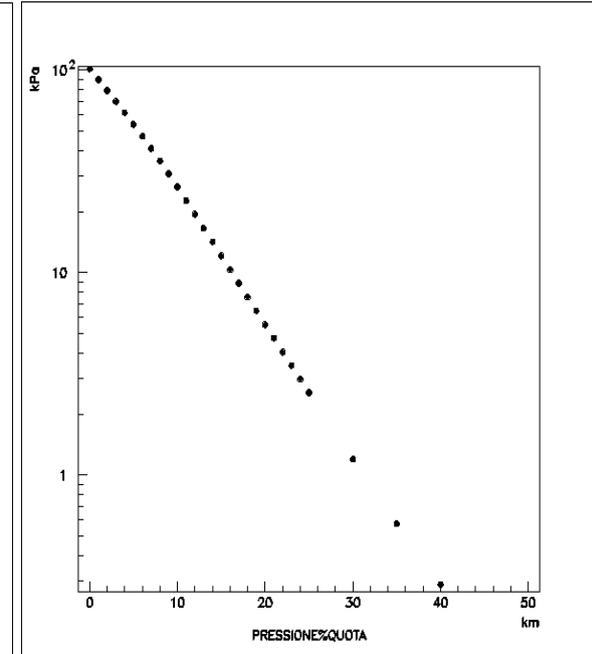
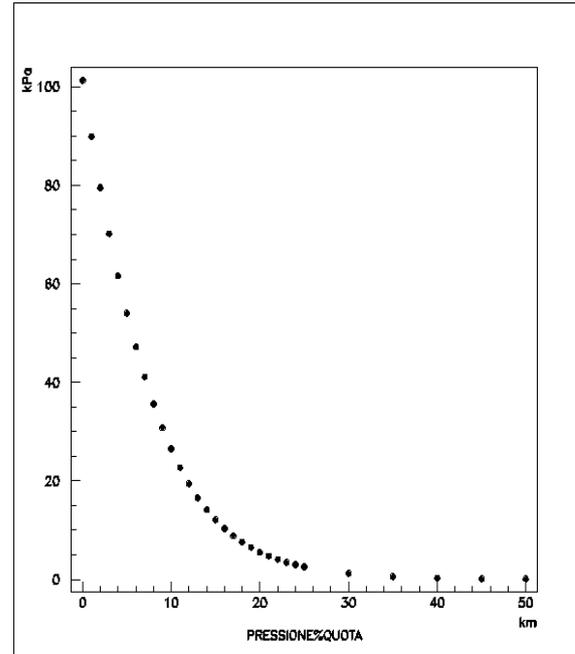
Se con la stessa versione di `limitecentrale.c` estraiamo solo 1000 valori invece di 100000 otteniamo praticamente gli stessi risultati ma gli errori sono piu' grandi di un fattore $\sqrt{100}=10$. Cio' e' dovuto ai maggiori errori statistici sul contenuto N di ogni bin (i quali dipendono da \sqrt{N})



Esempio: pressione atmosferica

in molti casi e' possibile ricondursi mediante
semplici trasformazioni a dipendenze lineari

Quota (km)	Pressione (kPa)	Quota	Pressione
0	101.325	15	12.111
1	89.876	16	10.350
2	79.501	17	8.850
3	70.121	18	7.565
4	61.660	19	6.467
5	54.048	20	5.529
6	47.217	21	4.729
7	41.105	22	4.048
8	35.651	23	3.467
9	30.800	24	2.972
10	26.499	25	2.549
11	22.699	30	1.197
12	19.399	35	0.575
13	16.579	40	0.287
14	14.170	45	0.149
		50	0.080



fit lineare

- il caso piu' semplice e piu' diffuso di fit e' quello lineare. La funzione che si suppone che possa descrivere i dati sperimentali e' una retta $y=Ax+B$.
- I dati sperimentali sono n coppie di punti (x_i, y_i) e le incertezze (errori) su queste grandezze. Per semplicita' assumiamo che le incertezze sulle x_i siano trascurabili rispetto a quelle sulle y_i che chiamiamo σ_i .
- I parametri A e B si determinano minimizzando rispetto a A e B la quantita' $\chi^2 = \sum_{i=1, n} ((y_i - (Ax_i + B)) / \sigma_i)^2$
- le formule risultanti nella versione piu' idonea per il calcolo numerico si trovano sul testo al paragrafo 8.1.1

Integrazione di funzioni

- Concentriamoci su integrali in una dimensione del tipo

$$I = \int_D f(x) dx$$

dove D è un dominio di integrazione definito (ad esempio l'intervallo $[a,b]$ dell'asse x)

- Esistono diversi metodi, in questa lezione mostreremo i più semplici (per una trattazione più completa si rinvia al cap.8 del testo).

Metodo dei rettangoli

- Si approssima la funzione con un valore costante (polinomio di Lagrange di grado 0) in un intervallo $[a,b]$:

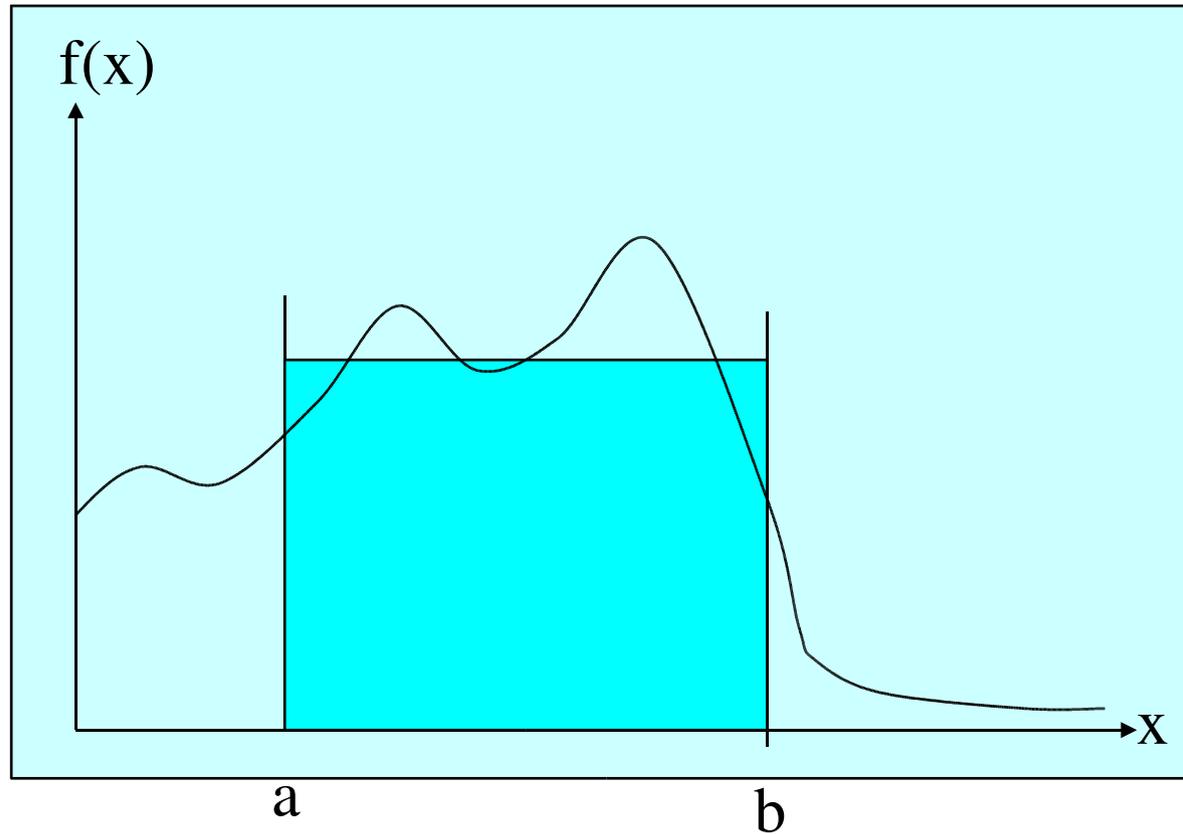
$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{caso particolare del metodo del punto di mezzo})$$

L'integrale esteso a tale intervallo vale

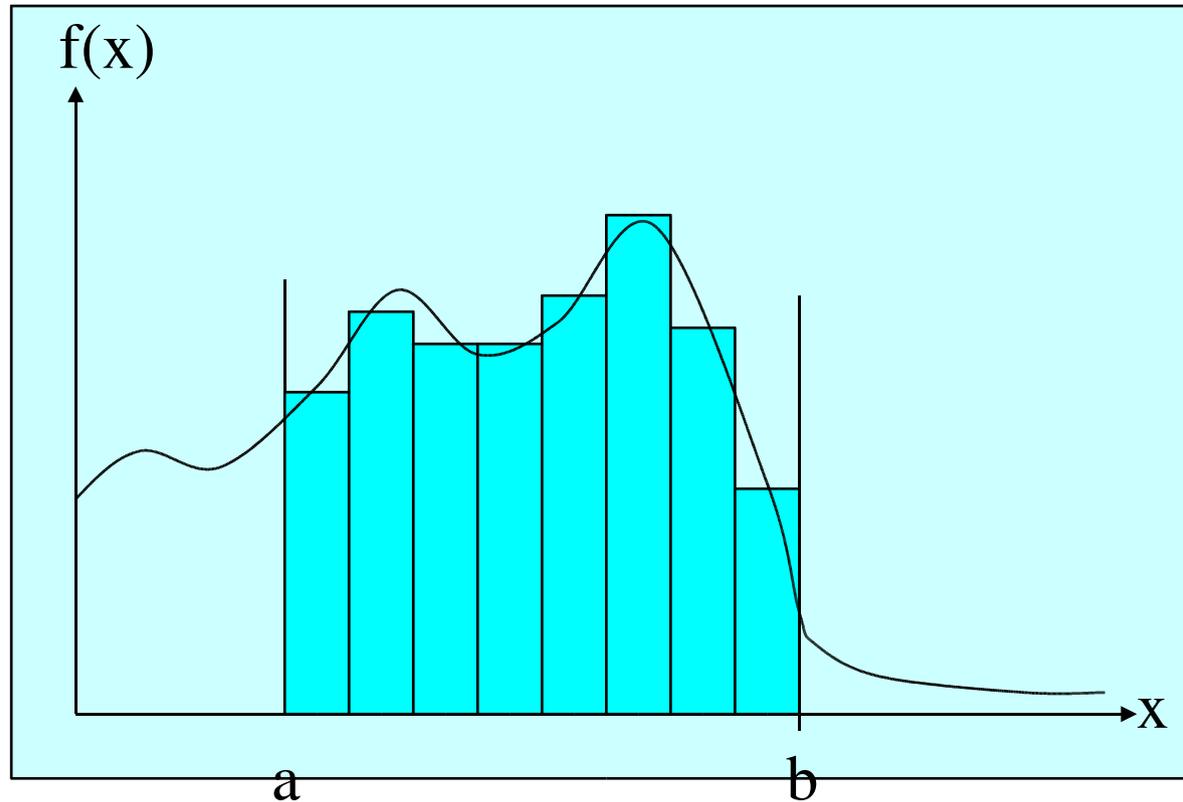
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a)$$

- L'errore commesso è pari all'integrale della $r(x)=f(x)- f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ed è tanto più grande quanto più esteso è l'intervallo di integrazione (va col quadrato della dimensione dell'intervallo)
- Per ridurre l'errore si suddivide l'intervallo di integrazione in tanti intervallini.

Metodo dei rettangoli



Metodo dei rettangoli



Metodo dei trapezi

- Si approssima la funzione con un polinomio di Lagrange di grado 1 (retta) in un intervallo $[a,b]$:

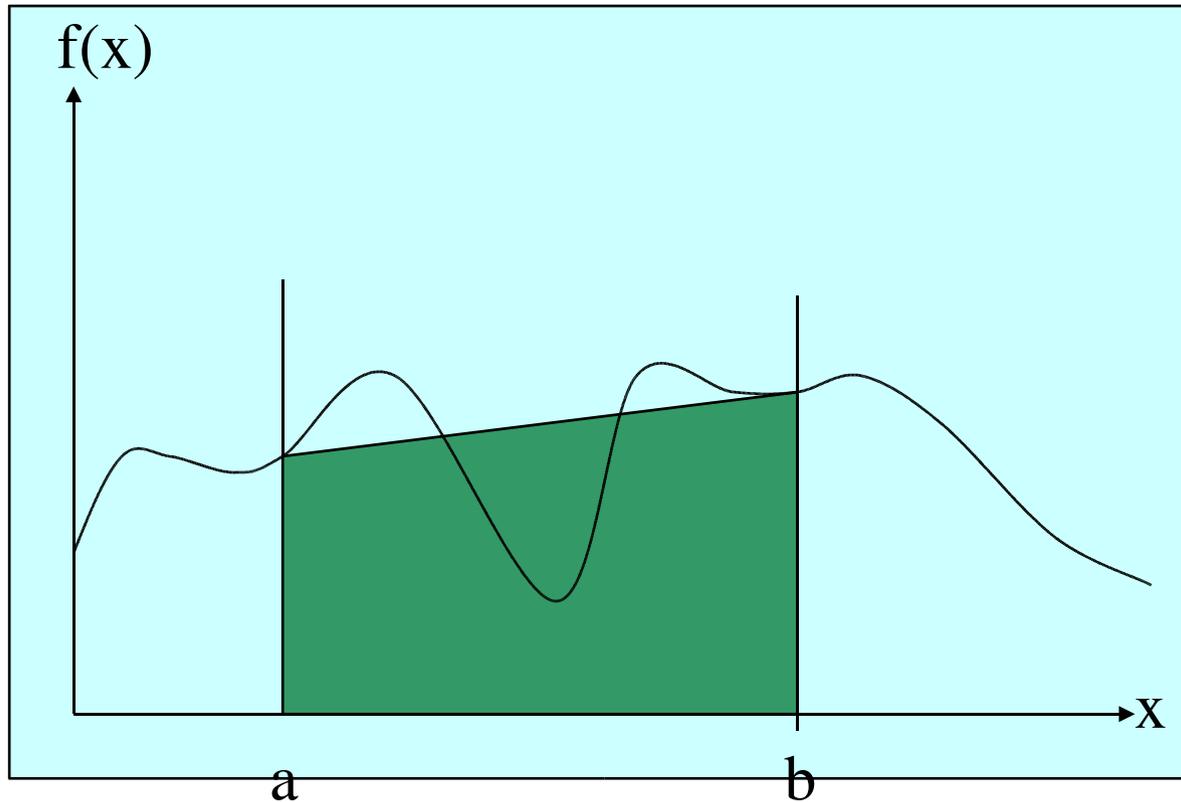
$$f(x) \approx \left((f(b)-f(a))*x + (b*f(a)-a*f(b)) \right) / (b-a)$$

L'integrale esteso a tale intervallo vale

$$(f(a)+f(b))*(b-a)/2$$

- Per l'errore valgono le considerazioni precedenti: l'errore è dell'ordine di $(a-b)$ al cubo per la derivata seconda della f calcolata in un punto interno all'intervallo.
- Per ridurre l'errore si suddivide ancora l'intervallo di integrazione in tanti intervallini.

Metodo dei trapezi



metodo Monte Carlo

- se si estraggono casualmente N valori x_i della variabile x nell'intervallo $[a,b]$, per N sufficientemente grande e distribuzione uniforme (ma il metodo vale anche per diverse distribuzioni di probabilita', vedi testo) e' come se
 - si fosse suddiviso l'intervallo di integrazione in N intervallini di dimensioni simili, ed in media pari a $(b-a)/N$
 - si fosse scelto a caso un punto all'interno di ogni intervallo nel quale valutare la funzione $f(x)$
 - l'integrale della funzione f nell'intevallo $[a,b]$ puo' quindi essere approssimato con la sommatoria

$$\sum_{i=1,n} f(x_i) * (b-a)/N$$