

3) Rappresentazione dei dati in memoria

La memoria

- Una memoria deve essere un insieme di oggetti a più stati. Questi oggetti devono essere tali che:
 - le dimensioni siano limitate
 - il tempo necessario per registrare o leggere un'informazione sia minore possibile
 - l'energia necessaria sia minima
 - la registrazione e la lettura siano affidabili

Elementi di memoria

- Le ultime 4 condizioni non sono realizzabili con dispositivi meccanici, ma solo con sistemi magnetici e/o elettronici.
- Non esistono però sistemi magnetici o elettronici con più di due stati (mentre questo è possibile con dispositivi meccanici).
- Per gli elementi di memoria dei calcolatori vengono quindi utilizzati elementi non meccanici a due stati.

Numeri e loro codifica

Per non confondervi ricordate sempre che:

Un numero ha un valore quantitativo intrinseco,
indipendente dalla rappresentazione usata per
esprimerlo in cifre (numerale).

Codifica e Basi

- Noi usiamo abitualmente la base 10 per esprimere in cifre i numeri, forse perché abbiamo 10 dita. Per rappresentare il numero 12 ad esempio contiamo fino a 10, esauriamo le dita, scriviamo quindi un 1 "nella colonna delle decine" e ricominciamo a contare. Contiamo 2 e lo scriviamo "nella colonna delle unità", ottenendo appunto 12.
- Supponiamo di avere solo un dito, come una memoria del calcolatore: come rappresenteremmo il numero 5?

Rappresentazione in base 2

- Cominciamo a contare: 0, 1, 2, ma a 1 abbiamo già finito le dita, scriviamo quindi 10 (che vale 2) e continuiamo a contare.
- 3 sarà espresso come 11
- 4 sarà espresso come 100
- 5 sarà dato da 101
- Formalmente

$$(5)_{10} = 5 * 10^0 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (101)_2$$

Sistema di numerazione posizionale

- La rappresentazione delle informazioni numeriche con il sistema posizionale è definita dall'espressione:

$$\left(\dots a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots \right)_b = \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots$$

- in cui: b è la base, le cifre a sono elementi di un insieme costituito da b simboli diversi, il punto separa gli elementi associati a termini con esponente negativo da quelli associati a termini con esponente positivo o nullo.

Basi di uso più comune

- Base 10 (rappresentazione decimale)
- Base 2 (rappresentazione binaria)
- Base 8 (rappresentazione ottale)
- Base 16 (rappresentazione esadecimale)
 - NB mentre per rappresentare un numero nelle prime 3 basi sono sufficienti i 10 caratteri 0-9, in base esadecimale servono degli altri simboli per rappresentare i numeri 10,11,12,13,14 e 15, questi sono
A B C D E e F

Conversioni tra basi: esempi (1)

- Il numero binario 10011 convertito in base 10 vale
 $1*1+1*2+0*4+0*8+1*16=19$
- Il numero ottale 5071 convertito in base 10 vale
 $1*1+7*8+0*64+5*512=1+56+2560=2617$
- Il numero esadecimale 48F convertito in base 10 vale
 $15*1+8*16+4*256=15+128+1024=1167$

Conversioni tra basi: esempi (2)

- Come convertiamo il numero decimale 19 in base 2? Esprimendolo come una combinazione lineare di potenze di 2

$$1*1 + 1*2 + 0*4 + 0*8 + 1*16$$

ovvero eseguendo divisioni successive per 2, fermandosi al risultato intero e registrando il resto ...

Dividendo	Risultato	Resto
19	9	1
9	4	1
4	2	0
2	1	0
1	0	1

- E ricordando che il primo resto è il coefficiente del termine di ordine più basso del polinomio avremo 10011.

Conversioni tra basi:esempi (3)

- Conversione in base 8 del numero decimale 2617: questa volta si procede mediante divisioni successive per 8

Dividendo	Risultato	Resto
2617	327	1
327	40	7
40	5	0
5	0	5

E quindi la rappresentazione ottale cercata è 5071

Conversioni tra basi: esempi (4)

- Conversione del numero decimale non intero 15.375 in base 2:
 - Parte intera: 15
ovvero 1111 in base 2
 - Parte frazionaria: $0.375 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8}$
ovvero 0.011 in base 2

Quindi 15.375 in base 10 corrisponde a
1111.011 in base 2

Conversioni tra basi: esempi (5)

- Metodo generale per convertire la parte frazionaria: moltiplicazioni successive per la nuova base registrando le parti intere. In questo caso $N=0.375$ moltiplicatore=2

Moltiplicando	risultato	parte intera
0.375	0.750	0
0.750	1.500	1
0.500	1.000	1
0		

E ritroviamo 0.011

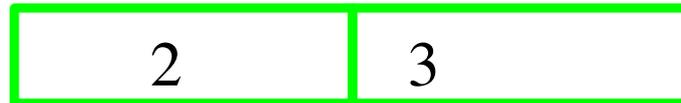
Conversioni tra basi: esempi (6)

- Caso particolarmente semplice: le conversioni tra basi che sono potenze di 2 (binaria, ottale, esadecimale). Infatti 3 bit (valori compresi tra 0 e 7) corrispondono ad una cifra ottale e 4 bit (valori compresi tra 0 e 15) corrispondono ad una cifra esadecimale.

Il numero decimale 19 si scrive

in base 2 0 0 0 1 0 0 1 1

in base 8



in base 16



Operazioni fra variabili numeriche binarie

- Addizione:
 - $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$
- Sottrazione:
 - $0-0=0$, $1-0=1$, $1-1=0$, $10-1=1$
- Moltiplicazione:
 - $0*0=0$, $1*0=0$, $1*1=1$
- Divisione:
 - $0/1=0$, $1/1=1$, $10/1=10$

Esempi di operazioni fra variabili numeriche binarie

- $11010101 + 1100011 = 100111000$

($213 + 99 = 312$ in base 10)

- $1010011 - 101001 = 101010$

($83 - 41 = 42$ in base 10)

- $10110 * 11 = 1000010$

($22 * 3 = 66$ in base 10)

- $1001010 / 101 = 1110$ con resto di 4

($74 / 5 = 14.8$ in base 10)

NB $4/5 = 0.8$ ha un numero infinito di cifre in rappresentazione binaria.

Rappresentazione in memoria dei numeri

- Disponiamo di due soli stati e quindi non possiamo inserire un separatore tra due numeri in memoria (servirebbe un terzo stato).
- I numeri in memoria quindi occupano una quantità fissata di bit consecutivi (voce di memoria) qualunque sia il loro numero di cifre significative.
- Il numero di bit di una voce varia a seconda dell'elaboratore ma è sempre un multiplo di 4 (generalmente di 8).

Rappresentazione in memoria dei numeri interi

- Per registrare un numero intero in una voce dobbiamo registrarne sia il segno che il valore.
- Per il segno ci sono due possibilità: riservargli un bit, per esempio il primo da sinistra, oppure utilizzare il suo complemento. Per i numeri interi si utilizza generalmente questa seconda soluzione.
- La complementazione consiste nello scambiare tutti gli 0 di un numero con degli 1 e viceversa e nell'aggiungere un 1 al bit meno significativo (quello più a destra).

Rappresentazione in memoria dei numeri interi

- Supponendo di lavorare con una voce a 32 bit (4 byte) il numero 19 sarà rappresentato da

00000000 00000000 00000000 00010011

- Mentre -19 sarà

11111111 11111111 11111111 11101101

- Con questa rappresentazione dei numeri negativi è immediato avere $(19)+(-19)=0$!

00000000 00000000 00000000 00010011 +

11111111 11111111 11111111 11101101 =

0 00000000 00000000 00000000 00000000

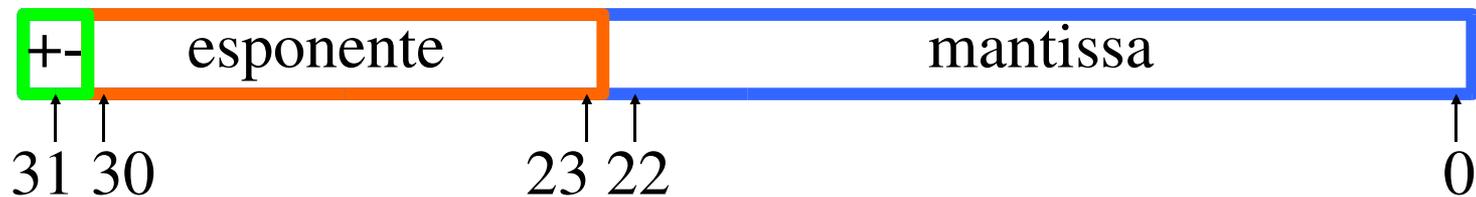
Rappresentazione in memoria dei numeri razionali

- Per registrare un numero razionale binario, per esempio +110.010011 sorge il problema di non poter indicare la posizione del punto decimale che è variabile (*floating point*).
- La soluzione generalmente adottata consiste nell'esprimere il numero in forma esponenziale "normalizzata" e registrare separatamente nella voce l'**esponente** e la **mantissa**.

$$+110.010011 = +1.10010011 * 2^2$$

Rappresentazione in memoria dei numeri razionali

- Lo standard IEEE 754 prevede nel caso di voci a 32 bit che
 - il bit più significativo (bit 31) indichi il segno della mantissa (0=+, 1=-)
 - i successivi 8 bit (bit 30-23) contengano la rappresentazione dell'esponente nella forma "eccesso a 127" (ovvero $\text{esponente}+127$, consentendo di includere il segno)
 - i rimanenti 23 bit (bit 22-0) contengano la parte frazionaria della mantissa



Rappresentazione in memoria dei numeri razionali

- Poichè la mantissa è "normalizzata" è sempre del tipo 1.xxxxxx e quindi non è necessario rappresentare l'1 prima del punto. La mantissa è dunque espressa con 24 bit ma solo i 23 meno significativi sono rappresentati.
- Fa eccezione il numero 0 per il quale tutti e 32 i bit sono nulli.
- La rappresentazione dell'esponente può assumere valori compresi tra -127 e 128 , estremi però riservati a indicare condizioni eccezionali.

Rappresentazione in memoria dei numeri razionali: esempio

- Rappresentiamo il numero decimale 0.03125
 - la rappresentazione in forma esponenziale normalizzata è $1 * 2^{-5}$
 - il segno è +, quindi il bit più significativo sarà 0
 - l'esponente sarà registrato come $127 - 5 = 122$ che in forma binaria si scrive 01111010
 - la parte frazionaria della mantissa normalizzata è 0

Otteniamo quindi

00111101 00000000 00000000 00000000

in notazione esadecimale (più compatta) 3D000000

Numeri rappresentabili (32 bit)

- Numeri interi compresi tra

$$-2^{31} = 10000000 \ 00000000 \ 00000000 \ 00000000$$

$$2^{31} - 1 = 01111111 \ 11111111 \ 11111111 \ 11111111$$

Ovvero tra i numeri decimali -2147483648 e 2147483647

- Lo zero e alcuni numeri razionali compresi tra

$$-2^{-126} = 1.401298 * 10^{-45} \quad \rightarrow (2 - 2^{-23}) * 2^{127} = 3.402823 * 10^{38}$$

- Infatti la minima distanza tra due numeri razionali consecutivi è data dal bit meno significativo della mantissa per 2 elevato all'esponente.
- Se il modulo di un numero è maggiore del massimo numero rappresentabile si ha un *overflow*, se è compreso tra zero ed il più piccolo numero positivo rappresentabile si ha un *underflow*.

Numeri rappresentabili (64 bit)

- lo standard IEEE 754 prevede la definizione di numeri razionali in doppia precisione (64 bit)
- la convenzione adottata e' la stessa riservando 11 bit per l'esponente anziche' 8
- in questa rappresentazione i valori massimo e minimo sono rispettivamente $1.797693 \cdot 10^{303}$ e $4.940656 \cdot 10^{-324}$

Approssimazioni

- tutti i numeri non interi si approssimano al numero razionale piu' vicino che ammetta una rappresentazione finita (parte frazionaria esprimibile come somma di un numero limitato di potenze di 2)
- due numeri piu' vicini tra loro di 2^{-n} , con n numero di bit riservati alla mantissa, sono considerati uguali
- un numero minore del piu' piccolo numero rappresentabile equivale a 0 (underflow)
- la conseguenza di cio' sono errori generalmente piccoli, la cui propagazione puo' generare errori significativi.
- particolare attenzione va prestata ai casi in cui gli operandi siano molto diversi o molto simili tra loro.

Variabili logiche

- La logica si occupa di proposizioni o enunciati che possono assumere due soli stati, vero o falso, che sono quindi rappresentabili in un sistema binario.
- Scegliamo la convenzione che assegna i valori 1 ad una proposizione vera e 0 ad una falsa.
- Le operazioni logiche fra tali proposizioni dovranno riprodurre le funzioni (operatori logici) "e", "o", "non" e le loro combinazioni.
- Siano A e B due variabili logiche definiamo alcune operazioni tra di esse.

Operazioni logiche: AND

- Prodotto logico: corrisponde all'"e" del linguaggio comune ed è indicato col termine AND. Si indica con $P=A.B$ (ma si codifica in modo diverso a seconda del linguaggio di programmazione!). P è vero solo se lo sono sia A che B . La "tabella della verità" è:

A	B	$P=A.B$
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1

Operazioni logiche: OR

- Somma logica inclusiva: corrisponde all'"o" del linguaggio comune ed è indicata col termine OR. Si indica con $S=A+B$ (ma si codifica in modo diverso a seconda del linguaggio di programmazione!). S è vera solo se lo è almeno una delle variabili A e B .

A	B	$S=A+B$
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

Operazioni logiche: XOR

- Somma logica esclusiva: corrisponde all'"o" restrittivo del linguaggio comune ed è indicata col termine XOR. Si indica con $S=A \oplus B$ (ma si codifica in modo diverso a seconda del linguaggio di programmazione!). S è vera solo se lo è una sola delle variabili A e B.

A	B	$S=A \oplus B$
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	0

Operazioni logiche: NOT

- Inversione logica: corrisponde al "non" del linguaggio comune ed è indicata col termine NOT. Si indica con $I=A$, o $I=\bar{A}$ (ma si codifica in modo diverso a seconda del linguaggio di programmazione!). I è vera solo se A è falsa

A	$I=\bar{A}$
1	0
0	1

rappresentazione dei caratteri

- un carattere e' un simbolo grafico rappresentante:
 - un fonema (lettera dell'alfabeto: 'a', 'A'...)
 - un segno di punteggiatura (incluso lo spazio: '?', ' ', ';'...)
 - una cifra da 0 a 9 ('0'...'9')
 - un elemento di controllo (andata a capo, fine stringa...)
 - altri simboli (valute, ideogrammi...)
- un modo semplice per rappresentare questo tipo di informazione e' un codice numerico convenzionale
- il codice ASCII (American Standard Code for Information Interchange) usa 8 bit (256 caratteri possibili). I primi 128 da 0 (NULL) a 127 sono definiti univocamente, i restanti 128 variano con la codifica scelta
- una sua estensione e' UNICODE che ha come obiettivo di associare a ciascun carattere esistente nel mondo un codice univoco.

stringhe di caratteri

- una stringa e' una sequenza di caratteri (parola, frase) anche priva di senso compiuto.
- puo' includere qualsiasi carattere in qualunque posizione, ad eccezione del carattere NULL (in codice 0) che viene usato come segno distintivo della fine della stringa e deve quindi comparire una ed una sola volta come ultimo carattere.
- una stringa composta da n caratteri ha una lunghezza totale nella sua rappresentazione di $n+1$ caratteri includendo lo 0 finale.