Integrazione numerica

Integrazione di funzioni

- Concentriamoci su integrali in una dimensione del tipo

  $$I = \int_D f(x)\, dx$$

  dove D è un dominio di integrazione definito (ad esempio l'intervallo [a,b] dell'asse x)
- Esistono diversi metodi, in questa lezione mostreremo i più semplici (per una trattazioen piu' completa si rinvia al cap.8 del testo).

Metodo dei rettangoli

- Si approssima la funzione con un valore costante (polinomio di Lagrange di grado 0) in un intervallo [a,b]:

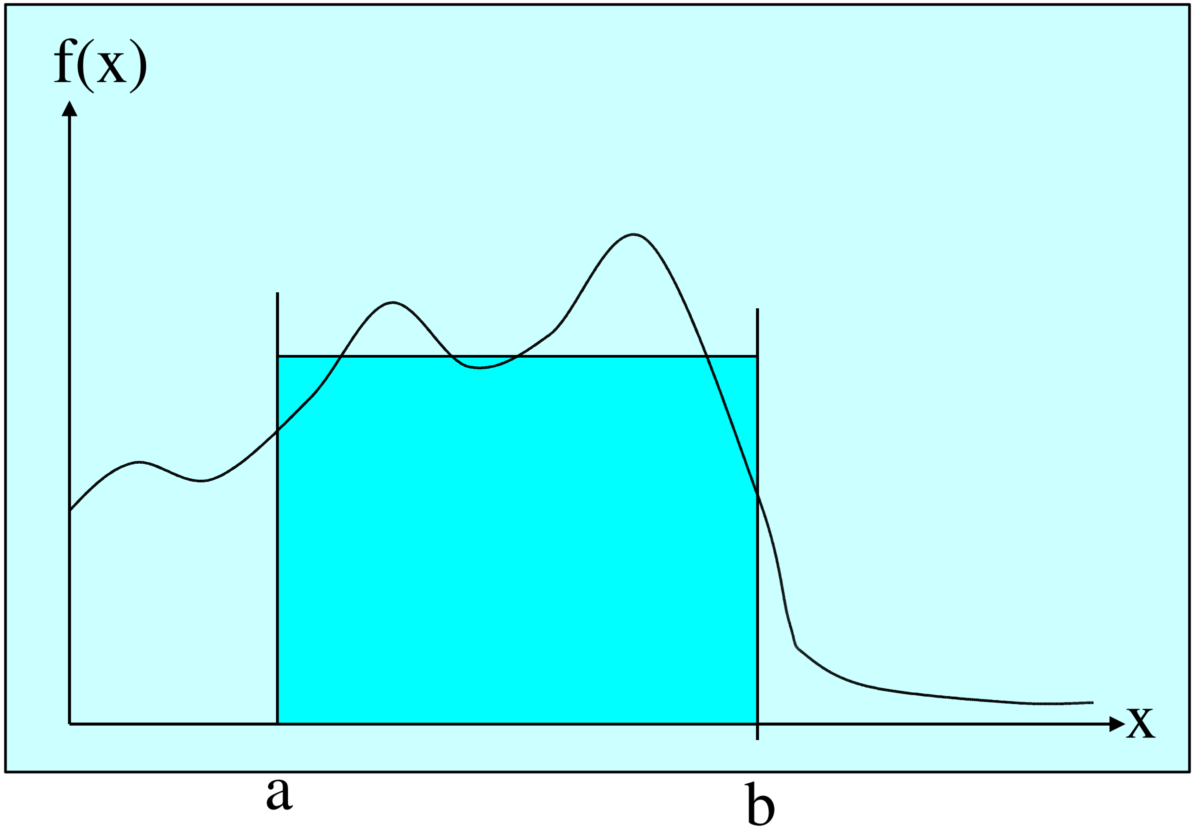
  f(x) ≈ f((a+b)/2) (caso particolare del metodo del punto di mezzo)

  L'integrale esteso a tale intervallo vale

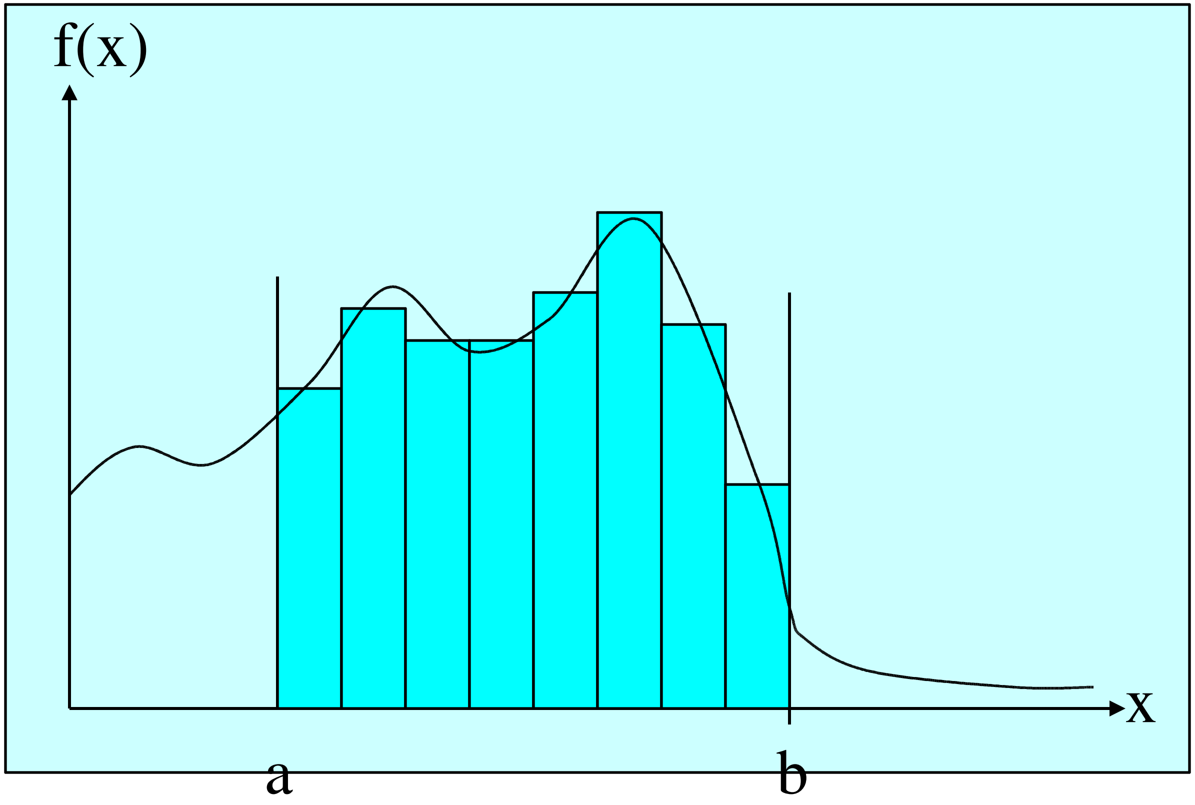
  f((a+b)/2) (b-a)
- L'errore commesso è pari all'integrale

  della r(x)=f(x)- f((a+b)/2) ed è tanto più grande quanto più esteso è l'intervallo di integrazione (<u>va col quadrato della dimensione dell'intervallo</u>)
- Per ridurre l'errore si suddivide l'intervallo di integrazione in tanti intervallini.

Metodo dei rettangoli



Metodo dei rettangoli



Metodo dei trapezi

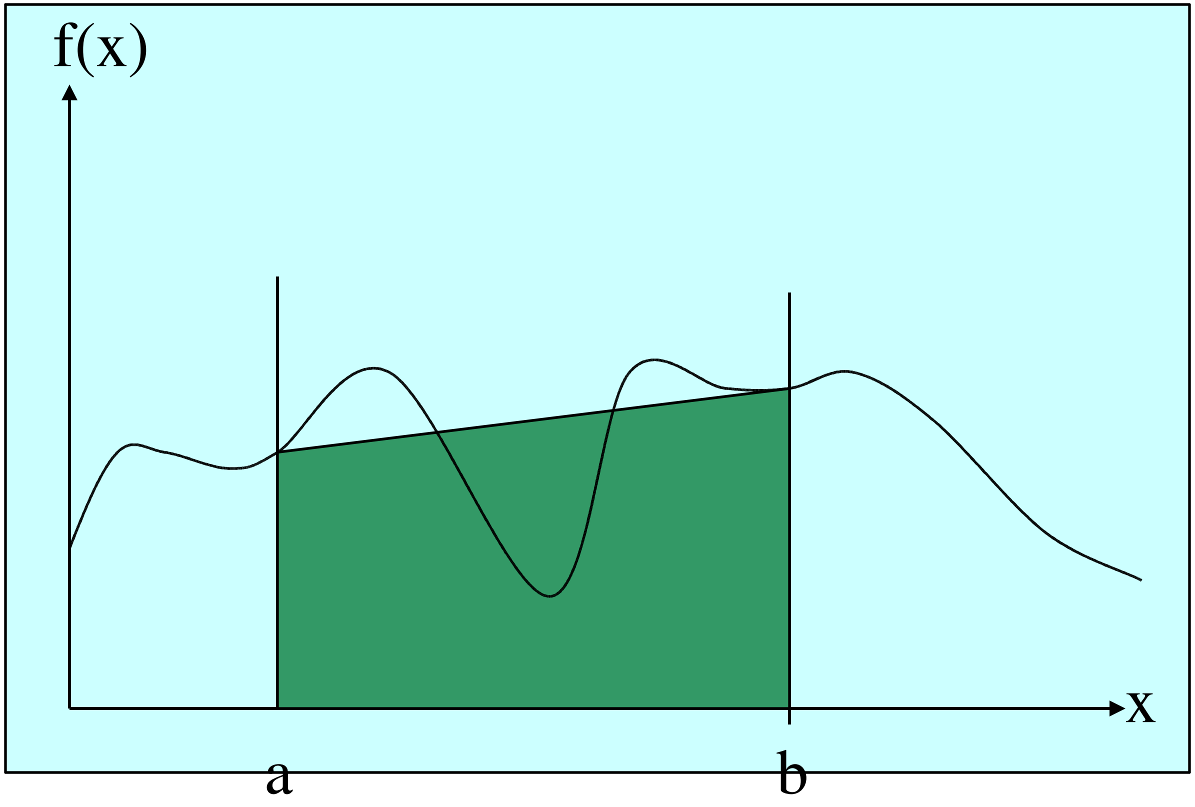
- Si approssima la funzione con un polinomio di Lagrange di grado 1 (retta) in un intervallo [a,b]:

  f(x) ≈ ((f(b)-f(a))*x + (b*f(a)-a*f(b))) / (b-a)

  L'integrale esteso a tale intervallo vale

  (f(a)+f(b))*(b-a)/2
- Per l'errore valgono le considerazioni precedenti: l'errore è dell'ordine di (a-b) al cubo per la derivata seconda della f calcolata in un punto interno all'intervallo.
- Per ridurre l'errore si suddivide ancora l'intervallo di integrazione in tanti intervallini.

Metodo dei trapezi



metodo Monte Carlo

- se si estraggono casualmente N valori x_i della variabile x nell'intervallo [a,b], per N sufficientemente grande e distribuzione uniforme (ma il metodo vale anche per diverse distribuzioni di probabilita', vedi testo) e' come se
  - si fosse suddiviso l'intervallo di integrazione in N intervallini di dimensioni simili, ed in media pari a (b-a)/N
  - si fosse scelto a caso un punto all'interno di ogni intervallo nel quale valutare la funzione f(x)
  - l'integrale della funzione f nell'intevallo [a,b] puo' quindi essere approssimato con la sommatoria

$$\Sigma_{i=1,n} f(x_i)*(b-a)/N$$