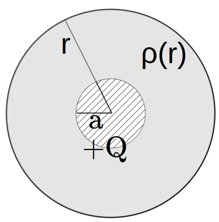
Fisica 2 - Terzo scritto giugno 2024

Esercizio 1

Si vogliono determinare le proprietà di un modello atomico composto da:
- un nucleo centrale, che contiene una carica positiva $+Q$ uniformemente distribuita in una sfera di raggio a;
- un guscio esterno tra i raggi $r = a$ e $r \to \infty$, con densità di carica $\rho(r) = kr^{-4}$ dove k è una costante.

1. Calcolare la costante k imponendo che l'atomo sia globalmente neutro. [**3 punti**]
2. Scrivere il campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{r})$ all'interno del guscio. [**4 punti**]
3. Ponendo $V(\infty) = 0$, trovare il potenziale $V(\vec{r})$ all'interno del guscio e in particolare per $r = 2a$. [**4 punti**]

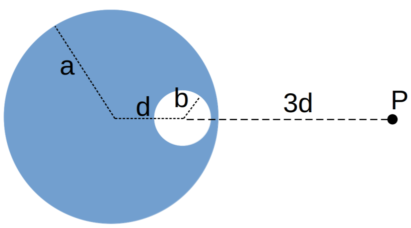


Dati:
$Q = 1.6 \times 10^{-19}$ C
$a = 10^{-10}$ m

Esercizio 2

In un lungo conduttore cilindrico di raggio a viene praticata una cavità, sempre cilindrica, di raggio b. La distanza tra il centro del cilindro e della cavità è d. Nel conduttore si ha una corrente i uniforme.

1. Dimostrare che, per il calcolo del campo magnetico, il sistema equivale ad un cilindro pieno di raggio a con densità di corrente $j = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)}$, più un cilindro di raggio b con densità di corrente $-j$. [**4 punti**]
2. Determinare il modulo del campo magnetico nel punto P distante $3d$ dalla cavità. [**4 punti**]
3. Un elettrone viene lanciato dal punto P verso il centro del cilindro con velocità v. Calcolare la forza di Lorentz sull'elettrone in P, e dire se modifica il modulo della velocità. [**3 punti**]

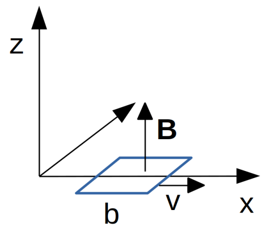


Dati:
$i = 5$ A
$a = 40$ cm
$b = 8$ cm
$d = 30$ cm
$v = 50$ m/s

Esercizio 3

Una piccola spira quadrata di lato b e resistenza R si trova immersa in un campo magnetico ad essa ortogonale e con modulo variabile secondo la legge $B(x) = B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$. Vale $b \ll \lambda$ e si può considerare uniforme il campo sull'area della spira. La spira si muove lungo x con velocità costante $(x = vt)$.

1. Dimostrare che il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira è una funzione periodica del tempo; determinare il suo massimo Φ_M e la frequenza Ω. [**4 punti**]
2. Scrivere la f.e.m. e la corrente indotte nella spira in funzione del tempo. [**3 punti**]
3. Scrivere la forza di Laplace esercitata sulla spira e discuterne il segno. (Suggerimento: essendo la spira piccola, si può usare l'approssimazione $B(x + b) \simeq B(x) + \frac{dB}{dx} b$) [**4 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. La carica nel guscio è

$$Q_{\text{guscio}} = \int_a^\infty \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = 4\pi k \int_a^\infty r^{-2}\, dr = \frac{4\pi k}{a} \tag{1}$$

Se l'atomo deve essere neutro, si deve imporre $Q_{\text{guscio}} = -Q$. Allora,

$$k = \frac{-Qa}{4\pi} = -1.3 \times 10^{-30} \text{ C m} \tag{2}$$

2. Notiamo che ρ è funzione solo di r, quindi per la simmetria sferica anche il campo elettrico sarà radiale e funzione solo di r: $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$. Possiamo quindi usare il teorema di Gauss prendendo una superficie sferica di raggio r:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}} = \frac{1}{\epsilon_0}[Q_{\text{nucleo}} + Q_{\text{guscio}}(r)] \tag{3}$$

dove $Q_{\text{nucleo}} = Q$, mentre la carica interna del guscio:

$$Q_{\text{guscio}}(r) = \int_a^r \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr' = 4\pi k \int_a^r r'^{-2}\, dr' = -4\pi k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{4}$$

Inserendo la (2) si può anche scrivere

$$Q_{\text{guscio}}(r) = Q\left(\frac{a}{r} - 1\right) \tag{5}$$

e infine

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{a}{r} \Rightarrow E(r) = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \equiv -\frac{k}{\epsilon_0 r^3} \tag{6}$$

3. Il potenziale si trova integrando:

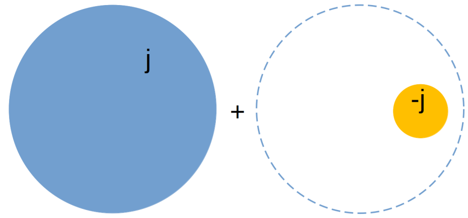
$$V(r) = -\int E(r)\, dr = -\frac{Qa}{4\pi\epsilon_0}\int r^{-3}\, dr \tag{7}$$

quindi

$$V(r) = \frac{Qa}{8\pi\epsilon_0 r^2} \equiv -\frac{k}{2\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(2a) = 1.8 \text{ V} \tag{8}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Per il principio di sovrapposizione, il campo magnetico prodotto dal sistema equivale a quello prodotto dai due cilindri in figura.



Pensando di sovrapporre i due cilindri, si avrà una densità di corrente j nella parte piena e zero nella cavità. Vogliamo che j sia la stessa del conduttore cavo, ed essendo la corrente uniformemente distribuita, si avrà $j = i/A$ dove A è l'area piena del conduttore. Ma $A = \pi(a^2 - b^2)$ e quindi in effetti

$$j = \frac{i}{\pi(a^2 - b^2)} \tag{9}$$

2. Possiamo usare la sovrapposizione dei campi prodotti dai due cilindri. Per il teorema di Ampère, il cilindro di raggio a dà un contributo

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi \cdot 4d} \tag{10}$$

dove la corrente i_1 è

$$i_1 = j \cdot \pi a^2 \tag{11}$$

quindi

$$B_1 = \frac{\mu_0 j a^2}{8d} = \frac{\mu_0 i a^2}{8\pi d(a^2 - b^2)} \tag{12}$$

Analogamente per il cilindro di raggio b

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi \cdot 3d} \tag{13}$$

dove

$$i_2 = j \cdot \pi b^2 \tag{14}$$

quindi

$$B_2 = \frac{\mu_0 j b^2}{6d} = \frac{\mu_0 i b^2}{6\pi d(a^2 - b^2)} \tag{15}$$

La corrente nei due cilindri scorre in verso reciprocamente opposto, quindi il risultato finale è dato dalla differenza

$$B(P) = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \frac{3a^2 - 4b^2}{24(a^2 - b^2)} = 8.2 \times 10^{-7}\ \mathrm{T}. \tag{16}$$

3. L'elettrone subisce la forza

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} \tag{17}$$

con $\vec{v}$ e $\vec{B}$ ortogonali, quindi

$$F = -evB(P) = 5.2 \times 10^{-24}\ \mathrm{N} \tag{18}$$

essendo $B(P)$ dato dalla (16). La forza di Lorentz non compie lavoro quindi non modifica l'energia cinetica e il modulo di v.

Soluzione del terzo esercizio:

1. Il flusso del campo magnetico è

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S \tag{19}$$

dove $\vec{n}$ è il versore della spira, che prendiamo nel verso di z, e $S = b^2$ l'area immersa nel campo magnetico. Allora

$$\Phi = b^2 B = b^2 B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \tag{20}$$

ed essendo $x = vt$,

$$\Phi(t) = b^2 B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt\right) \tag{21}$$

il massimo è

$$\Phi_M = b^2 B_0 \tag{22}$$

mentre la frequenza

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} v \tag{23}$$

Quindi

$$\Phi(t) = \Phi_M \cos \Omega t \tag{24}$$

2. Le f.e.m. indotta è

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \Omega \Phi_M \sin \Omega t \tag{25}$$

e quindi la corrente

$$i(t) = \frac{\Omega \Phi_M}{R} \sin \Omega t \tag{26}$$

3. La forza è

$$\vec{F} = \int i d\vec{l} \times \vec{B} \tag{27}$$

I due lati paralleli a x danno contributo uguale in modulo e opposto in segno, dunque rimangono solo i lati perpendicolari. Se x è la coordinata del lato sinistro della spira, si avrà

$$F = ibB(x+b) - ibB(x) = ib[B(x+b) - B(x)] \simeq ib\frac{dB}{dx}b \tag{28}$$

dove

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{2\pi}{\lambda} B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \tag{29}$$

ma $x = vt$:

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{2\pi}{\lambda} B_0 \sin \Omega t \tag{30}$$

e inserendo la corrente trovata in precedenza:

$$F = i(t) \cdot b^2 \cdot \frac{dB}{dx} = -\frac{\Omega \Phi_M}{R} \sin \Omega t \cdot b^2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} B_0 \sin \Omega t = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Omega \Phi_M^2}{R} \sin^2 \Omega t \tag{31}$$

La forza è sempre negativa, quindi frena il moto della spira, in accordo con la legge di Lenz.