Fisica 2 - Secondo esonero gennaio 2025

Esercizio 1

In un cilindro indefinito di raggio $a = 8$ cm scorre una corrente di densità $\vec{j}$ parallelamente all'asse del cilindro. Il modulo di $\vec{j}$ dipende unicamente dalla distanza r dall'asse del cilindro.

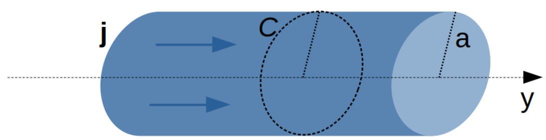
1. Determinare le linee del campo magnetico prodotto dalla corrente in tutto lo spazio. [**2 punti**]
2. Un magnetometro viene fatto scorrere lungo la circonferenza C e misura un campo magnetico di modulo $B = 1.5$ μT. Usare questa informazione per calcolare la corrente totale I_0 che scorre nel cilindro. [**3 punti**]

Supponiamo inoltre che la densità di corrente sia data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} j(r) &= j_0\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \text{ per } r \leq a \\ &= 0 \text{ per } r > a \end{aligned}$$

dove j_0 è una costante.

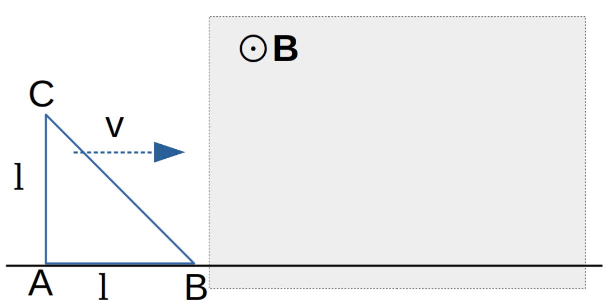
3. Calcolare il valore di j_0. [**3 punti**]
4. Determinare il campo magnetico in tutto lo spazio. [**5 punti**]
5. A distanza $r = 2a$ si pone, parallelamente al cilindro, un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente pari a I_0. Calcolare la forza per unità di lunghezza esercitata dal cilindro sul filo. [**3 punti**]



Esercizio 2

Una spira a forma di triangolo rettangolo (l=15 cm) viene mantenuta in moto a velocità costante $v = 0.2$ m/s, nella direzione dell'asse x in figura. All'istante t=0 la spira entra in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $B = 1.2$ T ortogonale al piano della spira. La resistenza della spira è 5 Ω e l'autoinduzione è trascurabile.

1. Dire fino a quale istante $\tilde{t}$ si ha una corrente indotta nella spira. [**3 punti**]
2. Determinare l'espressione della corrente indotta in funzione del tempo e calcolarne il valore in $\tilde{t}$. [**5 punti**]
3. Calcolare la forza esercitata dal campo magnetico su ciascun lato della spira al tempo $\tilde{t}$. [**5 punti**]
4. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule al tempo $\tilde{t}$. [**4 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. La simmetria assiale del problema indica che il modulo del campo magnetico può dipendere solo dalla distanza dall'asse del cilindro, quindi $B = B(r)$. Questo fatto, insieme alla direzione e verso dati dalla prima legge elementare di Laplace, dice che le linee del campo magnetico sono circonferenze con centro sull'asse del cilindro, poste in piani ortogonali ad esso e percorse in senso antiorario intorno al verso della corrente.

2. Per quanto si è detto al punto 1, il campo magnetico è tangente alla circonferenza C. Applichiamo il teorema di Ampère:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(a) \cdot 2\pi a = \mu_0 I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{2\pi a\, B(a)}{\mu_0} = 0.6 \text{ A} \tag{1}$$

3. La corrente nel cilindro vale

$$I_0 = \int_0^a j(r) 2\pi\, r\, dr = 2\pi\, j_0 \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] r\, dr = 2\pi\, j_0 \left[\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2\right] = \frac{\pi j_0 a^2}{2} \tag{2}$$

Quindi

$$j_0 = \frac{2I_0}{\pi a^2} = 59.7 \text{ A m}^{-2} \tag{3}$$

4. Il campo magnetico all'esterno del cilindro è lo stesso che produrrebbe un filo indefinito, sempre per il teorema di Ampère:

$$B(r > a) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \tag{4}$$

All'interno del cilindro conviene eseguire la circuitazione di B lungo una circonferenza di raggio generico r:

$$B(r) \cdot 2\pi\, r = \mu_0 \int_0^r j(r') 2\pi\, r'\, dr' \tag{5}$$

Quindi

$$B(r \leq a) = \frac{\mu_0 j_0}{r} \int_0^r \left[1 - \left(\frac{r'}{a}\right)^2\right] r'\, dr' = \frac{\mu_0 j_0}{r} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4a^2}r^4\right] \tag{6}$$

e in definitiva

$$B(r \leq a) = \frac{\mu_0 j_0}{2} \left[r - \frac{r^3}{2a^2}\right] \tag{7}$$

5. La forza esercitata su un tratto infintesimo $d\vec{l}$ di filo è

$$d\vec{F} = I_0 d\vec{l} \times \vec{B} \tag{8}$$

quindi la forza per unità di lunghezza è

$$\frac{dF}{dl} = I_0 B(r = 2a) = I_0 \frac{B(a)}{2} = 4.5 \times 10^{-7} \text{ N m}^{-1}. \tag{9}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira aumenta nel tempo, inducendo una corrente, quanto più la spira entra nella regione. Il fenomeno cessa quando la spira è completamente immersa nel campo, perché il flusso non varia più. Ciò si verifica quando l'intero cateto AB è entrato nella regione con il campo, ovvero all'istante

$$\tilde{t} = \frac{l}{v} = 0.75 \text{ s.} \tag{10}$$

2. Il flusso del campo magnetico è

$$\Phi = B \cdot S \tag{11}$$

dove S è l'area della spira immersa nel campo. All'istante generico t, la porzione di spira immersa è un triangolo rettangolo con cateto pari a vt, quindi di area $S = \frac{1}{2}v^2t^2$. Allora

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}Bv^2t^2 \tag{12}$$

e la f.e.m. indotta è

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bv^2t \tag{13}$$

quindi la corrente

$$i = -\frac{Bv^2t}{\mathcal{R}} \tag{14}$$

dove il segno meno indica che la corrente circola in senso orario con riferimento alla figura. In valore assoluto, all'istante $\tilde{t}$ si ha

$$i(\tilde{t}) = \frac{Bv^2\tilde{t}}{\mathcal{R}} = \frac{Bvl}{\mathcal{R}} = 7.2 \text{ mA} \tag{15}$$

3. Quando la spira è completamente immersa nel campo, il cateto AB è soggetto alla forza

$$\vec{F}_{AB} = i(\tilde{t})\vec{AB} \times \vec{B} \tag{16}$$

diretta verso l'alto e di modulo pari a

$$F_{AB} = i(\tilde{t})bB = \frac{B^2vl^2}{\mathcal{R}} = 1.3 \times 10^{-3} \text{ N} \tag{17}$$

Il cateto AC è soggetto ad una forza uguale in modulo a F_{AB} e diretta orizzontalmente verso destra. L'ipotenusa BC invece è soggetta alla forza

$$F_{BC} = i(\tilde{t})l\sqrt{2}\, B = \frac{B^2vl^2\sqrt{2}}{\mathcal{R}} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ N} \tag{18}$$

diretta in basso a sinistra, ortogonalmente a BC. Si può osservare che la somma vettoriale delle tre forze risulta nulla.

4. La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P = \mathcal{R}i^2 = \frac{B^2v^4t^2}{\mathcal{R}} \tag{19}$$

Quindi l'energia dissipata è

$$W = \int_0^{\tilde{t}} \frac{B^2v^4t^2}{\mathcal{R}}\, dt = \frac{B^2v^4\tilde{t}^3}{3\mathcal{R}} = \frac{B^2vl^3}{3\mathcal{R}} = 6.5 \times 10^{-5} \text{ J} \tag{20}$$