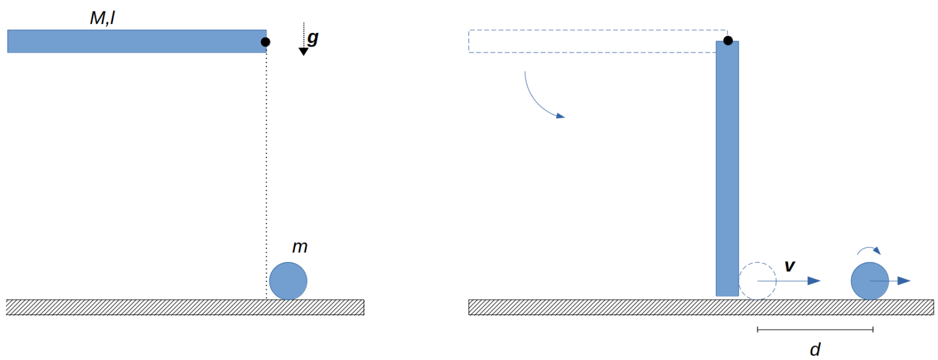
Fisica 1 - Secondo Esonero, 5 giugno 2023

Esercizio 1

Una sbarra di massa $M = 2.1$ kg e lunghezza $l = 0.8$ m può ruotare senza attrito intorno ad un perno, collocato ad suo estremo. Inizialmente la sbarra è in posizione orizzontale, e ad un certo istante viene lasciata libera di muoversi sotto l'azione del peso. In corrispondenza della verticale, la sbarra urta elasticamente un dischetto pieno e omogeneo, di raggio $r = 10$ cm, che inizialmente si trova in quiete su un piano scabro ($\mu = 0.1$). Subito dopo l'urto, si osserva che la sbarra si ferma e il disco inizia a strisciare sul piano. Dopo aver percorso una distanza d, il moto del disco diventa di puro rotolamento.

1. Determinare la velocità angolare della sbarra quando arriva alla verticale, subito prima dell'urto. [**4 punti**]
2. Determinare quanto vale la massa m del disco, e la sua velocità v subito dopo l'urto. [**5 punti**]
3. Dopo che il disco ha percorso la distanza d, la velocità del centro di massa diventa $(2/3)v$. Viene applicato un momento $\vec{\mathcal{M}}$ (con polo nel centro di massa dell'anello) opposto alla rotazione. Il disco si arresta dopo un tempo Δt, sempre rotolando senza strisciare. Calcolare $\vec{\mathcal{M}}$ e Δt. (suggerimento: ricordare che oltre a $\vec{\mathcal{M}}$ è presente anche l'attrito!) [**6 punti**]
4. Supponiamo ora che la massa del disco sia $m \to \infty$. Descrivere (senza formule) il moto della sbarra a seguito dell'urto, e dire se il suo momento angolare si conserva. [**3 punti**]



Esercizio 2

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione $p_A = 10^5$ Pa e temperatura $T_A = 500$ K, subisce le seguenti trasformazioni:

i) isoterma reversibile dallo stato A allo stato B, con $V_B = 2V_A$;

ii) adiabatica irreversibile dallo stato B allo stato C, con $V_C = 3V_B$ e $T_C = T_A/2$;

iii) isoterma reversibile dallo stato C a un certo stato D;

iv) isobara reversibile dallo stato D allo stato A.

1. Calcolare il volume del gas negli stati A, B, C e D e disegnare il ciclo realizzato sul piano $p - V$. Dire se è possibile collegare B e C con una adiabatica reversibile. [**4 punti**]
2. Calcolare il rendimento del ciclo. [**5 punti**]
3. Calcolare la variazione di entropia del gas nelle diverse trasformazioni. Dire se l'entropia dell'universo varia in un ciclo, e se sì di quanto. [**6 punti**]

Soluzione del primo esercizio:

1. La sbarra ruota intorno al perno sotto l'azione del peso. Non essendoci attrito, si conserva l'energia. L'energia potenziale della sbarra è quella del centro di massa, che si trova a distanza $l/2$ dall'estremità. La variazione di energia potenziale è pari alla variazione di energia cinetica, pertanto:

$$\Delta E_p = \Delta E_k \Rightarrow Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{1}$$

dove $I = \frac{1}{3}Ml^2$ è il momento d'inerzia della sbarra e ω la velocità angolare finale. Si ricava quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 6.06 \text{ rad/s}. \tag{2}$$

2. Durante l'urto, il momento delle forze esterne rispetto al polo fisso (cioè il perno) è zero, pertanto il momento angolare del sistema sbarra+disco si conserva. Il momento angolare iniziale della sbarra rispetto al perno è

$$L_s = I\omega = \frac{1}{3}Ml^2\omega \tag{3}$$

dove ω è data dall'equazione (2). Il momento angolare finale della sbarra è zero perché questa si ferma. Il disco invece acquista un momento angolare. Ora, essendo il suo raggio piccolo rispetto a l, si può in prima approssimazione considerare il disco come puntiforme e scrivere il suo momento angolare rispetto al perno:

$$L_d = mvl \tag{4}$$

Volendo essere più precisi, si può anche scrivere $L_d = mv(l - r)$. Comunque da (3) e (4) ricaviamo:

$$v = \frac{M}{3m}l\omega. \tag{5}$$

Inoltre sappiamo che l'urto è elastico, ovvero che l'energia meccanica si conserva. Quindi:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

(possiamo evitare di scrivere l'energia potenziale della sbarra, perché rimane la stessa prima e dopo l'urto). Allora, inserendo l'equazione (5):

$$\frac{1}{6}Ml^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{3m}\right)^2 l^2\omega^2 \tag{7}$$

da cui si ricava:

$$\frac{M}{3m} = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}M = 0.7 \text{ kg}. \tag{8}$$

Infine, la velocità vale (eq. 5):

$$v = l\omega = 4.85 \text{ m/s}. \tag{9}$$

3. Dall'istante in cui si applica un momento per frenare il disco, si hanno le seguenti equazioni:

$$F_{\text{att}} = ma_{\text{CM}} \tag{10}$$
$$\mathcal{M} - rF_{\text{att}} = I'\alpha \tag{11}$$

dove $I' = \frac{1}{2}mr^2$ è il momento d'inerzia del disco e α la sua accelerazione angolare[1]. Se il moto è sempre di puro rotolamento, $\alpha = a_{\text{CM}}/r$. Da (10) e (11) si ricava quindi:

$$\mathcal{M} = \frac{3}{2}rma_{\text{CM}}. \tag{12}$$

[1] I segni dell'eq. (11) si possono ricavare dal ragionamento seguente. Con riferimento alla figura del problema, il momento angolare del disco è entrante nel foglio, mentre $\vec{\mathcal{M}}$ deve avere verso opposto quindi uscente dal foglio. Inoltre $\vec{F}_{\text{att}}$ deve essere diretta verso sinistra perché il centro di massa del disco deve rallentare. Ma allora $\vec{r} \times \vec{F}_{\text{att}}$ è entrante nel foglio.

D'altra parte, la (10) in effetti implica:

$$F_{\text{att}} = \mu m g = m a_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = \mu g. \tag{13}$$

Il momento deve quindi essere:

$$\mathcal{M} = \frac{3}{2} r m \mu g = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m}. \tag{14}$$

Se il disco si arresta nel tempo Δt, significa che:

$$0 = v_{\text{fin}} = v_{\text{in}} - a_{\text{CM}} \Delta t = \frac{2}{3} v - a_{\text{CM}} \Delta t. \tag{15}$$

Quindi:

$$\Delta t = \frac{2v}{3 a_{\text{CM}}} = \frac{2v}{3 \mu g} = 3.3 \text{ s}. \tag{16}$$

4. Se $m \to \infty$, $v \to 0$ e il disco diventa un ostacolo fisso. Se l'urto è elastico, l'energia cinetica della sbarra prima e dopo l'urto si deve conservare, quindi la sbarra rimbalza e torna indietro. Il momento angolare $\vec{L}$ della sbarra non si conserva durante l'urto, perché, essendo $\vec{L}$ un vettore, cambia il suo verso.

Soluzione del secondo esercizio:

1. Il volume nei diversi stati è pari a:

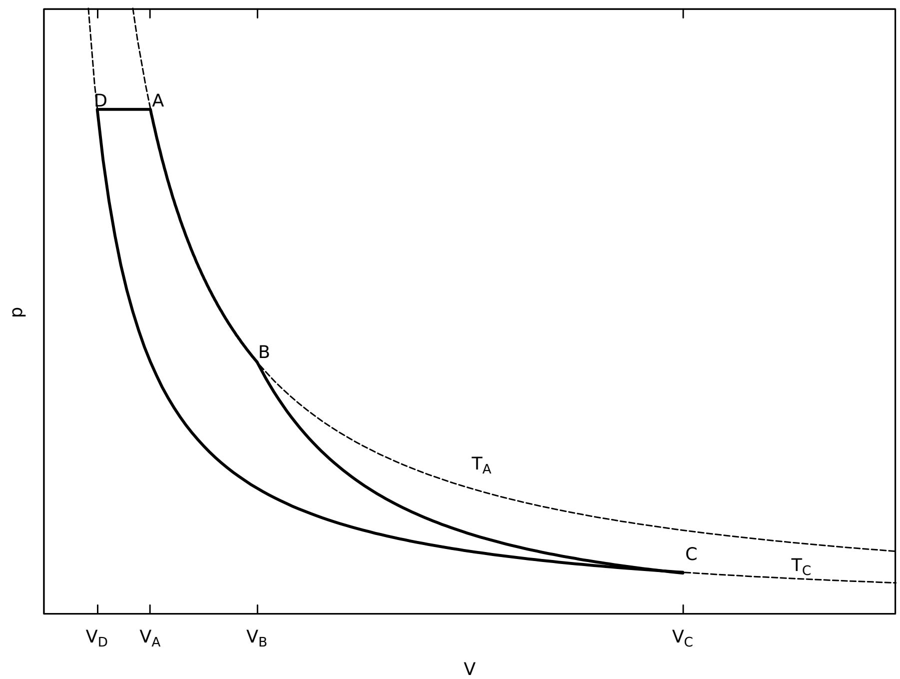
$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 0.042 \text{ m}^3 \tag{17}$$

$$V_B = 2V_A = 0.084 \text{ m}^3 \tag{18}$$

$$V_C = 3V_B = 0.252 \text{ m}^3 \tag{19}$$

$$V_D = \frac{nRT_D}{p_D} = \frac{nRT_C}{p_A} = 0.021 \text{ m}^3 \tag{20}$$

dove nell'ultima equazione si sfrutta il fatto che $T_D = T_C$ (CD è isoterma) e $p_D = p_A$ (DA è isobara).



Non è possibile collegare B e C con una adiabatica reversibile: in tal caso si avrebbe $\Delta S = 0$, mentre per una trasformazione irreversibile sappiamo che $\Delta S > 0$. Si può anche notare che $T_B V_B^{\gamma-1} \neq T_C V_C^{\gamma-1}$, mentre per una adiabatica reversibile vale l'uguaglianza.

2. Indicando con Q_c il calore ceduto dal gas e con Q_a il calore assorbito durante un ciclo, il rendimento si calcola come:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a}. \tag{21}$$

Occorre quindi determinare il calore ceduto e assorbito durante le diverse fasi del ciclo.

i) isoterma AB:

$$Q_{AB} = \mathcal{L}_{AB} = \int_A^B p\, dV = nRT_A \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 2881 \text{ J} \tag{22}$$

ii) adiabatica BC:

$$Q_{BC} = 0 \tag{23}$$

iii) isoterma CD:

$$Q_{CD} = \mathcal{L}_{CD} = \int_C^D p\, dV = nRT_C \log\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -5165 \text{ J} \tag{24}$$

iv) isobara DA:

$$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = n\frac{5}{2}R(T_A - T_D) = 5196 \text{ J} \tag{25}$$

Il gas assorbe calore in AB e DA, e cede calore in CD. Il rendimento è pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.36. \tag{26}$$

3. Calcoliamo prima le variazioni di entropia del gas nelle trasformazioni reversibili:

i) isoterma AB:

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T_A} = nR\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 5.763 \text{ J/K} \tag{27}$$

iii) isoterma CD:

$$\Delta S_{CD} = \frac{Q_{CD}}{T_C} = nR\log\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -20.660 \text{ J/K} \tag{28}$$

iv) isobara DA:

$$\Delta S_{DA} = \int_D^A \frac{dQ}{T} = nc_p\int_D^A \frac{dT}{T} = nc_p\log\left(\frac{T_A}{T_D}\right) = n\frac{5}{2}R\log\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = 14.407 \text{ J/K} \tag{29}$$

Osserviamo poi che la variazione totale di entropia del gas in un ciclo è pari a zero, quindi per l'adiabatica irreversibile BC si ha:

$$\Delta S_{BC} = -(\Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA}) = 0.490 \text{ J/K}. \tag{30}$$

In alternativa, si può anche scrivere una formula generale per ΔS_{BC} in funzione di due coordinate termodinamiche, ad esempio:

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} = \int_B^C \frac{p\,dV}{T} + \int_B^C \frac{dU}{T} = \int_B^C nR\frac{dV}{V} + \int_B^C nc_V\frac{dT}{T} \tag{31}$$

e alla fine:

$$\Delta S_{BC} = nR\log\left(\frac{V_C}{V_B}\right) + nc_V\log\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \equiv -(\Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA}). \tag{32}$$

La variazione di entropia dell'universo è sicuramente > 0 perché il ciclo non è reversibile. L'unico contributo non nullo è dato dalla trasformazione BC, perché le altre sono reversibili:

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{BC}^{(\text{gas})} + \Delta S_{BC}^{(\text{amb})} \tag{33}$$

Ma $\Delta S_{BC}^{(\text{amb})} = 0$ perché la trasformazione è adiabatica. Quindi

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{BC}^{(\text{gas})} = 0.490 \text{ J/K}. \tag{34}$$