Fisica 2 - Primo scritto gennaio 2024

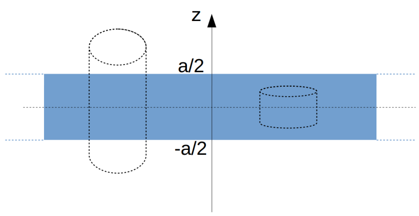
Esercizio 1

Una distribuzione di carica $\rho > 0$ uniforme è compresa tra due piani $z = -a/2$ e $z = +a/2$.

1. Mostrare che il campo elettrico $\vec{E} = E(z)\hat{u}_z$ con $E(z)$ funzione dispari. Con il teorema di Gauss, determinare $E(z)$ e tracciarne il grafico. (Suggerimento: usare superfici gaussiane cilindriche come in figura) [**4 punti**]

2. Determinare il potenziale V in tutto lo spazio, ponendo $V = 0$ sul piano $z = 0$. [**4 punti**]

3. Discutere i risultati nel limite $a \to 0$. [**3 punti**]



Esercizio 2

Il circuito RL dato in figura ($\varepsilon = 15$ V, $R = 1\Omega$, $L = 10^{-6}$ H) viene chiuso all'istante $t = 0$.

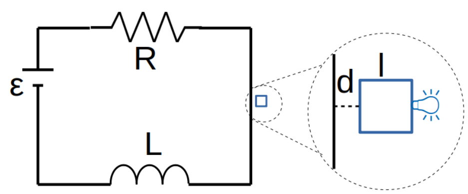
1. Determinare la corrente nel circuito all'istante $t_0 = 1\ \mu$s. [**3 punti**]

A distanza d=1 cm da un tratto del circuito, c'è una spira quadrata di lato l=3 cm, molto più piccola del circuito. Si può assumere che la spira sia influenzata solo dal tratto più vicino, che si può approssimare come un filo infinito.

2. Trovare la f.e.m. indotta nella spira in funzione del tempo e nel limite $t \to \infty$. [**4 punti**]

Alla piccola spira è collegata una lampadina con resistenza $R^* = 5\Omega$, che può stare accesa finché la tensione ai suoi capi è maggiore di una certa soglia. Si osserva che la lampadina si spegne all'istante t_0.

3. Determinare la tensione di soglia della lampadina e la potenza consumata per effetto Joule appena prima dello spegnimento. [**4 punti**]



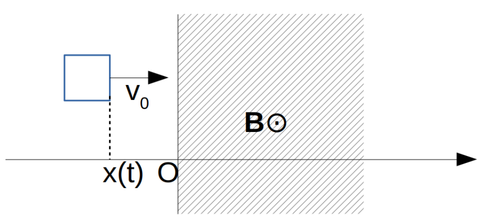
Esercizio 3

Una spira quadrata di lato l, resistenza R e induttanza nulla, trasla con velocità inziale v_0 come in figura, verso una regione in cui c'è un campo magnetico B uniforme e ortogonale alla spira. Sia $x(t)$ la posizione del lato destro della spira, e $t = 0$ l'istante in cui la spira entra nella regione.

1. Determinare la forza sulla spira finché il suo lato sinistro si trova nella regione con $B = 0$. [**4 punti**]

2. Sempre in questo intervallo, determinare la velocità della spira e la corrente in funzione del tempo. [**4 punti**]

3. Determinare direzione e verso della forza sulla spira 1) quando è totalmente immersa in B, 2) quando inizia ad uscire dalla regione. [**3 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. Per la simmetria della distribuzione, il campo elettrico può avere solo una componente lungo z e può unicamente essere funzione di z. Anche il verso del campo si può determinare subito: detto $\hat{u}_z$ il versore dell'asse z, il campo $\vec{E}(z)$ sarà diretto come $\hat{u}_z$ per $z > 0$ e come $-\hat{u}_z$ per $z < 0$. Dunque si può scrivere $\vec{E} = E(z)\hat{u}_z$ con $E(-z) = -E(z)$.

Applichiamo ora il teorema di Gauss come suggerito. Chiamiamo S l'area di base del cilindro. Quando consideriamo $|z| \geq a/2$, la carica interna al cilindro è pari a ρV dove $V = S \cdot a$. Inoltre dobbiamo considerare nel calcolo del flusso le due facce del cilindro. Allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2 \cdot E(z) \cdot S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho S a}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Quindi in modulo $E(z) = \rho a/2\epsilon_0$. Più precisamente:

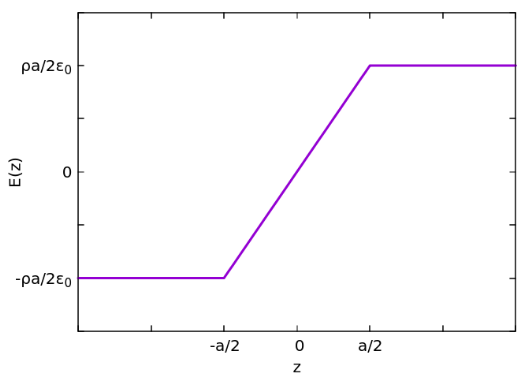
$$\vec{E}(z \geq a/2) = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\hat{u}_z \tag{2}$$

$$\vec{E}(z \leq -a/2) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}\hat{u}_z \tag{3}$$

Per $|z| < a/2$, il ragionamento è lo stesso ma il volume del cilindro stavolta vale $V = S \cdot 2z$. La carica interna quindi è $2\rho S z$. Allora:

$$\vec{E}(-a/2 < z < a/2) = \frac{\rho z}{\epsilon_0}\hat{u}_z \tag{4}$$

La funzione $E(z)$ è rappresentata in figura.



2. Il potenziale si trova per integrazione. Per $|z| < a/2$ si ha:

$$V(z) - V(0) = -\int_0^z E(z)\,dz = -\int_0^z \frac{\rho z}{\epsilon_0} dz = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} \tag{5}$$

e poiché $V(0) = 0$,

$$V(-a/2 \leq z \leq a/2) = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} \tag{6}$$

Per $|z| > a/2$ si svolge un calcolo simile, ma conviene riferirsi ai piani $z = \pm a/2$ in cui sappiamo dalla (6) che:

$$V(z = \pm a/2) = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} \tag{7}$$

Ad esempio per $z > a/2$ (cioè valori positivi di z):

$$V(z) - V(a/2) = -\int_{a/2}^z E(z)\,dz = -\int_{a/2}^z \frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz = -\frac{\rho z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \tag{8}$$

quindi inserendo la (7)

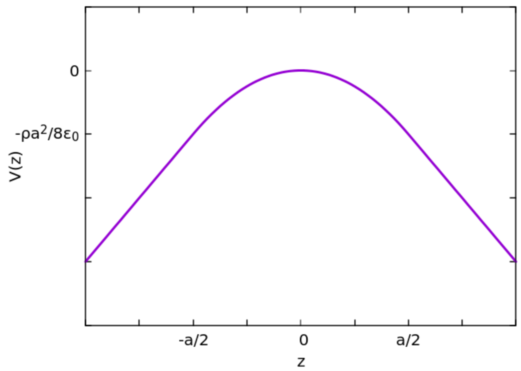
$$V(z > a/2) = -\frac{\rho z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} \tag{9}$$

Analogamente per $z < -a/2$ (valori negativi di z):

$$V(z) - V(-a/2) = -\int_{-a/2}^{z} E(z)\, dz = -\int_{-a/2}^{z} -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz = \frac{\rho z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \tag{10}$$

e inserendo la (7)

$$V(z < -a/2) = \frac{\rho z}{2\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} \tag{11}$$



3. Per $a \to 0$ la distribuzione tende a diventare piana e si ha ha un campo elettrico uniforme con una discontinuità in $z = 0$, che corrisponde al grafico di $E(z)$ trovato sopra per $a \to 0$. Ha senso allora definire una densità superficiale di carica $\sigma = \rho a$, tale che il campo elettrico abbia modulo $\sigma/2\epsilon_0$. Si può anche osservare che un cilindro di base S contiene una carica $q = \rho \cdot S \cdot a$ e quando $a \to 0$ tende a diventare un disco con carica $q = \sigma \cdot S$.

Soluzione del secondo esercizio:

1. L'equazione del circuito RL è

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = Ri \tag{12}$$

e ha come soluzione

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{13}$$

quindi al tempo t_0

$$i(t_0) = 9.5\,\mathrm{A} \tag{14}$$

2. Il tratto di circuito si approssima come un filo infinito percorso dalla corrente $i(t)$, che a distanza generica r produce un campo magnetico

$$B(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \tag{15}$$

La corrente varia nel tempo, quindi varia anche il campo magnetico e di conseguenza il suo flusso attraverso la spira:

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_d^{d+l} B\,l\,dr = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 i(t) l}{2\pi}\,\frac{1}{r}\,dr = \frac{\mu_0 i(t) l}{2\pi} \log\left(\frac{d+l}{d}\right) \tag{16}$$

Si ha quindi una f.e.m. indotta nella spira:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{d+l}{d}\right)\frac{di}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{d+l}{d}\right)\frac{\varepsilon}{L} e^{-(R/L)t} \tag{17}$$

dove si è usata la (13). Per $t \to \infty$, $\varepsilon_i \to 0$ infatti la corrente nel circuito RL tende al valore costante ε/R e di conseguenza non c'è più variazione di flusso magnetico.

3. Se la lampadina si spegne all'istante t_0, la tensione di soglia è pari a

$$\varepsilon_i(t_0) \simeq 20\,\mathrm{mV} \tag{18}$$

All'istante t_0 la corrente i^* attraverso la lampadina è

$$i^*(t_0) = \frac{\varepsilon_i(t_0)}{R^*} = 4\,\mathrm{mA} \tag{19}$$

e la potenza dissipata per effetto Joule vale

$$P = R^*[i^*(t_0)]^2 = 8 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}. \tag{20}$$

Soluzione del terzo esercizio:

1. Quando la spira entra nella regione destra, il flusso del campo magnetico attraverso di essa aumenta:

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = Blx(t) \tag{21}$$

e si ha quindi una f.e.m.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \tag{22}$$

dove il segno meno indica che la corrente indotta $i = \varepsilon_i/R$ circola in senso orario. Sulla spira agisce quindi la forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{B^2l^2}{R}x\hat{u}_x \tag{23}$$

dove si è considerato il solo lato verticale, in quanto i lati orizzontali danno contributo totale nullo (la forza su di essi è uguale in modulo e opposta in verso).

2. L'equazione del moto si scrive:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}v \tag{24}$$

Si può risolvere per integrazione, ottenendo

$$v(t) = C \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right) \tag{25}$$

dove C è una costante che si ricava dalla condizione iniziale. Poiché $v(t=0) = v_0$, in definitiva

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right) \tag{26}$$

La corrente che circola nella spira è

$$i(t) = -\frac{Blv(t)}{R} = -\frac{Blv_0}{R} \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right) \tag{27}$$

3. Quando la spira è totalmente immersa nel campo B, la forza di Lorentz risultante è nulla. Quando la spira inizia ad uscire dalla regione, vale lo stesso ragionamento fatto al punto 1, con la sola differenza che il flusso diminuisce nel tempo invece di aumentare. Ciò comporta che la f.e.m. indotta abbia segno positivo, dunque la corrente circola in verso antiorario. Tuttavia la forza di Lorentz ha lo stesso verso: si oppone sempre al moto della spira, conformemente alla legge di Lenz.